

注入同期型 E 級発振器のロックレンジを最大化する入力波形の設計と実験検証

矢部 洋司[†] 欧陽 有界[†] 中川 正基[†] 宇都宮健介[†]
 永島 和治^{††} 関屋 大雄^{††} 田中 久陽^{†a)}

A Design and Its Experimental Verification of Optimal Input Waveforms Maximizing Locking Ranges for an Injection-Locked Class-E Oscillator

Yoji YABE[†], Youjie OUYANG[†], Masaki NAKAGAWA[†], Kensuke UTSUNOMIYA[†], Tomoharu NAGASHIMA^{††}, Hiroo SEKIYA^{††}, and Hisa-Aki TANAKA^{†a)}

あらまし 注入同期とは、自励発振器に周期的外部信号を強制注入すると発振器が外部信号の周波数に同期する基本的な物理現象である。この注入同期は発振器の周波数安定性を向上し、長い歴史と様々な応用をもつ。ここでは最近得られた最適化理論 [1], [2] を用い、E 級発振器の引き込み周波数帯（ロックレンジ）を最大化する外部信号の波形を、様々な制約条件のもとで設計する。この波形は、数値シミュレーション並びに実機実験により最適であることが検証され、電子回路の発振器において、ロックレンジの最大化が可能であることが、理論、数値シミュレーション、回路実験により、初めて実証される。

キーワード 注入同期, 最適化問題, E 級発振器, 位相縮約, 位相感受関数

1. ま え が き

注入同期とは、自励発振器に周期的外部信号を強制注入すると発振器が外部信号の周波数に同期する基本的な物理現象である。注入同期の実用上の応用は真空管の時代にはじまるが、近年の電子機器の高周波数化、省電力化、微細化に伴い、その応用の対象が更に拡大している。しかしながら、その工学的応用の重要性和長い歴史にもかかわらず、注入同期の「性能」の向上可能限界を明らかにする理論は最近得られたばかりである [1], [2]。

本論文は、最近パワーエレクトロニクス分野で注目されている E 級発振器への応用を念頭に、図 1 に示す注入同期型 E 級発振器 [3], [4] を対象とし、その注入同期の生じる外部信号の周波数帯、すなわち引き込み周波数帯（ロックレンジ）の最大化が可能であること

を実験と理論の両面から示す。注入同期型 E 級発振器は、ロックレンジの範囲内で安定かつ高効率動作を可能にすることが知られており [3], [4]、このロックレンジをより広くすることが望ましい。そのため、本論文は、E 級発振器のロックレンジに関し以下の問題に解答を与える。

Q1 注入同期型 E 級発振器のロックレンジを最大化する入力波形（図 1(a) の Injection signal に相当）は理論的にどのように与えられるか？

Q2 上記の **Q1** で得られる理論的結果は、対応する回路シミュレーション及び実験の観測結果と整合するか？

本論文の構成は以下のとおりである。まず、**2.** において本研究の位置付けと問題設定を述べる。**3.** では、注入同期型 E 級発振器の回路モデルを導入し、これによる回路シミュレーションと実験系からの結果の整合性を検証する。その上で、実験系から、対応する回路方程式のパラメータ抽出を行う。一方、**4.** では、[1], [2] の最適化アルゴリズムを用いて、注入同期型 E 級発振器のロックレンジを最大化する入力信号波形を理論的に求める。**5.** では、**4.** で求めた入力信号波形がたしか

[†] 電気通信大学, 調布市
 The University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182-8585 Japan

^{††} 千葉大学, 千葉市
 Chiba University, Chiba-shi, 263-0022 Japan

a) E-mail: htanaka@uec.ac.jp

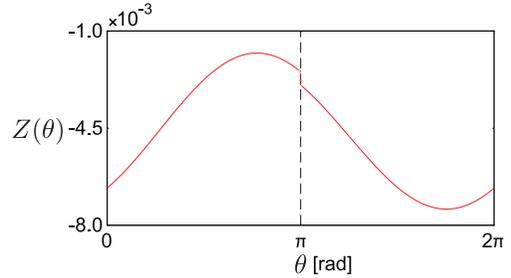
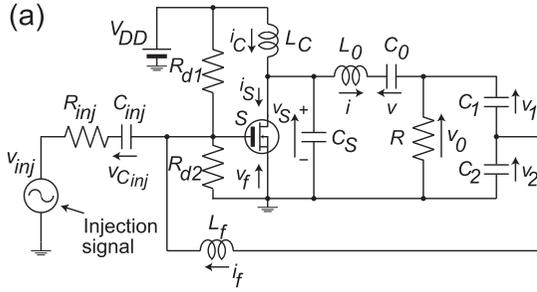


図 2 注入同期型 E 級発振器の位相感受関数 Z の例
Fig. 2 An impulse sensitivity function (ISF) Z of the designed injection-locked class-E oscillator.

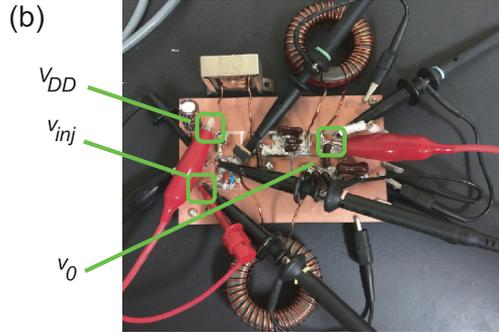


図 1 (a) 注入同期型 E 級発振器, (b) 回路実装の様子
Fig. 1 (a) An injection-locked class-E oscillator, (b) A circuit implementation.

に最適であることを実験により直接検証する。更に 4. で求めた入力信号波形と系統的な数値シミュレーション結果との整合性も確認する。

2. 本研究の位置づけと問題設定

先行研究 [3], [4] などにより, 注入同期型 E 級発振器のロックレンジを解析的に求めることが可能となっている。特に, 最近の研究 [4] は弱入力の仮定のもとで, 回路方程式のリミットサイクル解近傍のダイナミクス (すなわち, 発振状態) に対し, 発振位相について成り立つ位相方程式 (その詳細は, 例えば [5], [6] を参照) を導出している。その結果, 正弦波に限らない種々の入力信号波形に対しロックレンジが準解析的に得られ, これが回路シミュレーションあるいは実験系から得られるロックレンジと一致することの検証が可能となった。また, この結果により, 先行研究 [3] などにおける, 入力を正弦波に限る従来からの制約も不要となった。

上記の位相方程式とは, 次の 1 変数の常微分方程式により与えられる。

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma(\phi), \quad (1)$$

ただし, $\Gamma(\phi) = \frac{1}{2\pi} \langle Z(\theta + \phi) f(\theta) \rangle$

ここで, ϕ は発振波形と入力波形の位相差に相当する変数, $\Delta\omega (= \omega_0 - \Omega)$ は発振器の自然角周波数 ($= \omega_0$) と入力の角周波数 ($= \Omega$) の差 (離調), θ は $\theta = \Omega t$ を表す。更に, $Z(\theta)$ は対象とする発振器の位相感受関数, $f(\theta)$ は入力, $\langle \cdot \rangle$ は θ についての 1 周期にわたる積分, すなわち $\int_{-\pi}^{\pi} \cdot d\theta$ を示し, $\Gamma(\phi)$ は位相結合関数と呼ばれる。(これらの詳細, 導出については, [5], [6]などを参照)

図 2 に, 対象とする注入同期型 E 級発振器の位相感受関数 $Z(\theta)$ を示す。この $Z(\theta)$ はインパルス応答関数法 [7] により, 付録 1. の回路パラメータのもとで, 3. に示す回路を記述する常微分方程式から, 数値計算により得られる。その計算の概要は以下のとおりである。 $Z(\theta)$ を取得する際に用いる単一のパルスは, パルス幅を $0.002 \cdot 2\pi$ rad とし, 振幅 (高さ) を 10 V とした。このパルスは注入同期を意図するものではなく, $Z(\theta)$ を得るための (仮想的な) 微弱入力である。この入力は図 1(a) の入力段の $v_{inj}(t)$ に相当する。これに対し入力段の R_{inj} を $R_{inj} = 20$ k Ω と設定しているため, 実際に注入される電流は微弱である。したがってパルス注入後に生じる発振位相の位相シフト量も微小である。以上の設定のもとで, 発振位相 θ のタイミングでパルスを注入し, その結果引き起こされる位相のシフト量を入力のパルスの面積 ($= 0.002 \cdot 2\pi \cdot 10$ rad \cdot V) で正規化する。以上のルーチンを $\theta \in [0, 2\pi]$ の範囲で繰り返すことにより, θ ごとの $Z(\theta)$ の値が得られる。なお, $Z(\theta)$ は周期関数であり, 変数 $\theta = \Omega t$ は t の初期条件における任意性を残しているため, 以下では MOSFET のスイッチ (図 1(a) の S に相当) のオン・オフのタイミングがそれぞれ $\theta = 0, \pi$ となるように設定する。その他の詳細は, [4] の 5., [6] の 3. を参照のこと。

図 3 にロックレンジ (locking range) と位相結合関数 (interaction function) $\Gamma(\phi)$ の対応関係を示す。図

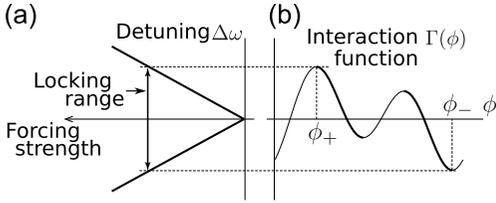


図3 (a) ロックレンジと (b) 位相結合関数 $\Gamma(\phi)$ の概念図
Fig.3 Schematic illustrations of (a) locking range and (b) interaction function $\Gamma(\phi)$.

3(a) は図 3(b) との対応のため、横軸を入力 f の強度 (forcing strength), 縦軸を上で定義した離調 (detuning) としている. 注入同期が成立するための必要十分条件は, 注入同期下の不動点 ϕ , すなわち式 (1) の左辺を 0 とおいたときの ϕ の解が $\Gamma'(\phi) < 0$ を満たす状態 (図 3(b) の曲線の太線部分に対応) であり, 位相結合関数の最大値 $\Gamma(\phi_+)$ と最小値 $\Gamma(\phi_-)$ の範囲内に離調 ($\Delta\omega$) が取まることと等価である. このように定義されるロックレンジは入力 f に対し一意に決まり, これを入力 f の汎関数として表示することが可能である. 更に, 入力 f の諸々の制約のもとで, ロックレンジを最大化する f を決定 (設計) する理論が最近得られている [1], [2].

本研究は以上の理論的枠組みと, 注入同期型 E 級発振器における [4] の結果をふまえ, 注入同期型 E 級発振器に対し, 入力のような制約条件のもとで, 実際にロックレンジを最大化する問題に取り組む.

従来研究において, 注入同期のロックレンジ等の最大化は, 最近, 実在系について [8]~[10] により報告されているが, これらはいずれも, 実験室で実現される特殊な化学振動子を対象としている. 実用上有用な電子回路等の実在系においても, ロックレンジの最大化が重要であることはいうまでもなく, 本研究は, この必要性に応えるものとして最初の実例と解析結果を与えるものである.

3. 実験系とシミュレーション結果の整合性

図 1(a) の回路内の MOSFET 素子以外は全て線形素子であり, 唯一の非線形素子である MOSFET の適切なモデリングが実験系と回路の数値シミュレーションの整合性を得るための要となる. 本研究では, 先行研究 [3], [4] にならない, 図 4 に示す MOSFET のスイッチモデル [11] を採用する. このモデルは, MOSFET のゲート-ソース間を等価キャパシタンス C_g 及び等価抵抗 r_g の直列結合により近似し, 更にドレイン-ソ-

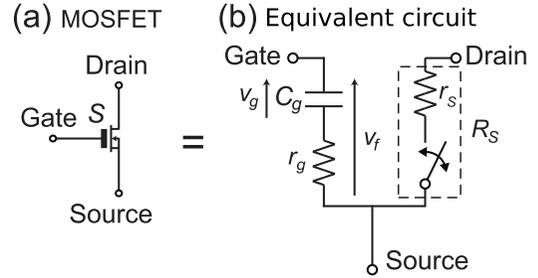


図4 MOSFET のスイッチモデル
Fig.4 A switch model of the MOSFET.

ス間をゲート-ソース間の電位差に応じてオン・オフが切り替わるスイッチ S と MOSFET のオン抵抗 r_S による直列結合で近似する. このスイッチにより, オン状態でドレイン-ソース間の等価抵抗が r_S となり, オフ状態ではこれが $+\infty$ となる. 以上のスイッチモデルにより, 図 1(a) の回路の方程式は次のように与えられる [3], [4].

$$\begin{aligned} \frac{di_C}{dt} &= \frac{1}{L_C} (V_{DD} - v_S - r_{L_C} i_C), \\ \frac{dv_S}{dt} &= \frac{1}{C_S} (i_C - \frac{v_S}{R_S(v_f)} - i), \end{aligned}$$

ただし,

$$R_S(v_f) = \begin{cases} r_S, & \text{for } v_f \geq V_{th} \text{ (スイッチオン)} \\ \infty, & \text{for } v_f < V_{th} \text{ (スイッチオフ)}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{i}{C_0}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L_0} (v_S - v - v_1 - v_2 - r_{L_0} i), \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} (i - \frac{v_1 + v_2}{R}), \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} (i - \frac{v_1 + v_2}{R} - i_f), \\ \frac{di_f}{dt} &= \frac{1}{L_f} (v_2 - v_f - r_{L_f} i_f), \\ \frac{dv_g}{dt} &= \frac{1}{C_g} (i_f + \frac{V_{DD} - v_f}{R_{d1}} + \frac{v_{inj} - v_{C_{inj}} - v_f}{R_{inj}} - \frac{v_f}{R_{d2}}), \\ \frac{dv_{C_{inj}}}{dt} &= \frac{v_{inj} - v_{C_{inj}} - v_f}{C_{inj} R_{inj}}, \\ v_f &= v_g + C_g r_g \frac{dv_g}{dt}. \end{aligned} \tag{2}$$

以上の式 (2) の各変数, パラメーター (回路の素子値) は図 1(a) に記載のとおりであり, $R_S(v_f)$ の定義は上記のスイッチモデルに対応している^(注1). また, $v_{inj}(t)$ は入力電圧波形を表し, t は時間を表す. 本論文では, 式 (2) の微分方程式の数値積分に 4 次のルンゲ-クッ

(注1) : R_S をオン・オフの 2 状態のみを取るスイッチモデルとしているため, 式 (2) の数値積分から得られる電圧・電流波形は, MOSFET のオン・オフの状態が切り替わる瞬間に角をもつ波形となる. 一方, 実験で得られる波形は, この角が, わずかに丸められた (なまった) ものとなる. (図 5 参照のこと) このことは, 数値シミュレーションにおいて R_S を v_f に依存して連続的に滑らかに変化する関数 $R_S(v_f)$ に変更することにより, 再現可能である (付録 2).

タ法を用い、時間刻み $\Delta t = 2\pi/(2000\omega_0) \simeq 3.1 \text{ nsec}$ とした。

本論文の実験系及び数値シミュレーションにおいて、入力抵抗 R_{inj} と MOSFET 以外の全ての素子値を [4] と同一に設定した。これらを付録 1. の表 A・1 に記載する。MOSFET 素子は [4] と同一の素子 (IRF530 MOSFET) を用いた。[4] では、上記の MOSFET 素子のスイッチモデルのパラメータ r_s, C_g, r_g を以下のように設定しており、本論文もこれにしたがう。まず、 r_s はデータシートに記載の値 ($r_s = 0.16 \Omega$) とする。次に、 C_g と r_g を実測値すなわち $C_g = 1.72 \text{ nF}$, $r_g = 3.0 \Omega$ とする。(これらの値は、[4] のものとわずかに異なっている。) また、 R_{inj} の値を $R_{inj} = 20 \text{ k}\Omega$ とした。その理由は、以上の諸々の素子値のもとで、 $R_{inj} = 20 \sim 40 \text{ k}\Omega$ に対し、ほぼ E 級動作条件 (ZVS/ZDS 条件) [3], [4] が満足されることが数値シミュレーション及び実験結果から認められるからである。(その一例は図 5 に示すとおりである。)

以上の設定のもとでの、数値シミュレーションと回路実験の結果比較を図 5 及び図 6 に示す。図 5 は、入力電圧 v_{inj} を振幅 5 V の正弦波とした場合の v_f, v_s, v_0 の電圧波形を比較している。その結果、数値シミュレーションと実験の電圧波形に高い精度の一致が認められ、いずれも E 級動作条件 [3], [4] を満足することが認められる。一方、図 6 は、この正弦波入力に対し、そのロックレンジを実験系、式 (2) の数値シミュレーション、式 (1) への縮約にもとづく解析的手法による結果の三者において比較している。図の横軸は離調 $\Delta\omega (= \omega_0 - \Omega)$ を示し、縦軸は入力の振幅を示す。明らかに、それぞれのロックレンジは高い精度で一致することが認められる^(注2)。すなわち、[3], [4] と同様の回路方程式と MOSFET のモデリングのもとで、電圧波形、ロックレンジについて実験系と数値シミュレーションの定量的な整合が得られ、[4] と同様の結果が再現された^(注3)。

(注2)：この一致度は R_{inj} を十分大きく設定すると常に得られ、4. の図 8 のとおり、正弦波以外の他の入力波形に対しても同様の高い精度の一致が認められる。特に、図 6 の数値シミュレーションと解析的手法の結果の一致度が高く、部分的に両者が重なってプロットされている。

(注3)：本論文の実験と数値シミュレーションは、E 級動作時の v_f の振幅 ($\simeq 20 \text{ V}$) が V_{th} ($\simeq 3 \text{ V}$) に比べ十分大きい条件下で行われている。このとき MOSFET は、ほぼオン・オフの 2 状態のみで動作しており、スイッチモデルの良い近似となっている。一方、実験において v_f の振幅を極端に小さくしていくと、実験結果と (上記のスイッチモデルを用いた) 数値シミュレーションの結果は、一致しなくなることが認められる。

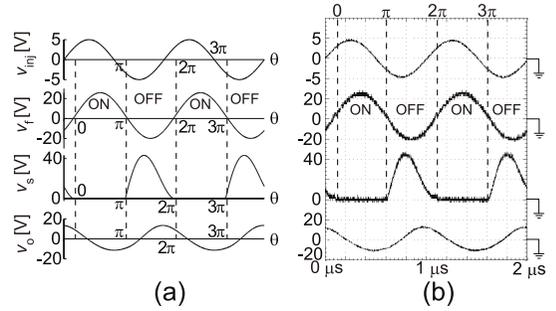


図 5 E 級動作条件を満たす電圧波形の比較。(a) 数値シミュレーション結果、(b) 実験結果

Fig. 5 Comparisons of free-running class-E oscillator voltage waveforms. Waveforms from (a) numerical simulations, and (b) circuit experiments.

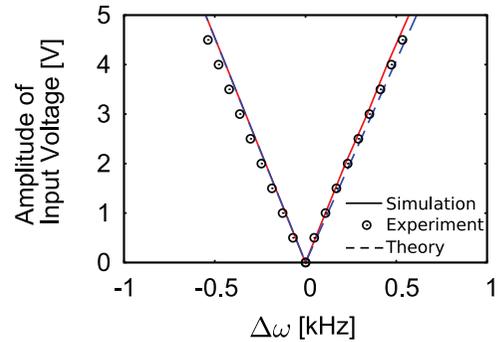


図 6 数値シミュレーション、実験、理論から得られるロックレンジの比較

Fig. 6 Comparisons of locking ranges, obtained from numerical simulations, circuit experiments, and theory.

数値シミュレーションによらず、解析的にロックレンジを求める手法には、シミュレーション結果の正しさの裏付けを与えるのみならず、計算量を大幅に削減する利点がある。解析的手法によれば、位相感受関数 $Z(\theta)$ を一度得ることができれば、任意の入力波形に対して、ロックレンジを簡単に算出することができる。この $Z(\theta)$ は、式 (2) の過渡応答解析を ($\theta \in [0, 2\pi]$ の範囲で、等間隔の θ の値で) 100 回程度くり返すのみで精度良く求められる。一方、回路シミュレーションから直接にロックレンジを求める場合は、入力の強度を一定とした上で周波数を掃引しながら時間波形を取得する。そして、この波形から同期・非同期を判定する。具体的な手順は、まず自励発振周波数と等しい周波数を起点とし、そこから一定の粗い周波数ステップで入力周波数を変化させ、非同期状態を検出するま

で掃引する．次に同期・非同期領域の境界では，同期状態を検出した点と非同期状態を検出した点の中央の周波数において，同期・非同期を新たに判定する．これを同期・非同期領域の境界のみで一定回数繰り返す．このように同期・非同期領域の境界付近では周波数ステップを細かくする一方，それ以外の箇所では周波数ステップを粗くするという手順をとることで効率的に掃引を行っている．しかし，このような工夫によっても，後述される図8のデータ点を得るためには，一つのデータ点ごとに入力1種類当り式(2)の過渡応答解析を130回程度くり返す必要がある．

4. E級発振器の入力信号波形の最適化

[1], [2]の最適化理論の結果より，1:1同期のロックレンジを最大化する最適入力波形 $f_{opt, p}$ は，それぞれ (a) $p = 1$, (b) $1 < p < \infty$, (c) $p = \infty$, の3通りの制約条件に対し別々に得られる．その詳細は次のとおりである．まず制約条件として，入力(注入)波形 f に $\|f\|_p \equiv \langle |f(\theta)|^p \rangle^{\frac{1}{p}} = M$ の制約を課し， M を正定数とする．特に， $p = 1$ の場合， $\|f\|_1 = \langle |f| \rangle = M$ ，すなわち f の掃引する「面積」が M に制約されることを示す．また， $p = 2$ の場合， $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f^2 \rangle} = M$ ，すなわち f の2乗平均が $\frac{M^2}{2\pi}$ に制約されることを示す．これは f の実効値が $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \langle f^2 \rangle} = \frac{M}{\sqrt{2\pi}}$ に制約されるともいえる．また， $p = \infty$ で，制約は $\|f\|_\infty = M$ ，すなわち $|f(\theta)| < M$ となるため f の最大値が M に制約されることを示す．

図7に，これらに対応する最適入力波形を示す．図中の左側が理論解，右側が実験においてファンクションジェネレータにより生成した波形である．以下，制約条件 (a), (b), (c) ごとに，その詳細を説明する．

(a) $p = 1$ の場合

$$f_{opt, 1}(\theta) = M[\Delta(\theta) - \Delta(\theta + \Delta\phi_{max})], \quad (3)$$

ただし， $\Delta(\theta + \Delta\phi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} (|\theta + \Delta\phi| \leq \epsilon \text{ なる } \theta), \\ 0 \text{ (その他の } \theta), \end{cases}$

が最適入力波形となる．ただし， $\epsilon \rightarrow +0$ ^(注4)．つまり，パルス間の位相差 $\Delta\phi$ が $\Delta\phi = \Delta\phi_{max}$ である正負一対パルスが最適解である．この最適値 $\Delta\phi_{max}$ は，与えられた位相感受関数 $Z(\theta)$ に対し唯一に決定

(注4)：正確にはパルス中を0に近づけることにより，ロックレンジは理想的な最大ロックレンジにいくらかでも漸近する(その詳細は[1]のp.7の3.2と[2]のp.6の5.3を参照のこと)．

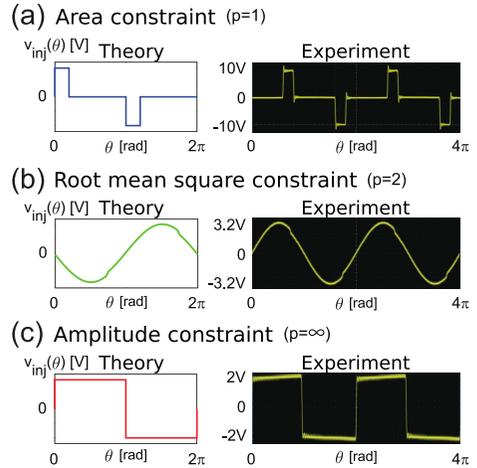


図7 最適入力電圧波形．(a) 面積制約の場合 ($p = 1$)，(b) 実効値制約の場合 ($p = 2$)，(c) 振幅制約の場合 ($p = \infty$)

Fig. 7 Optimal input voltage waveforms under (a) area constraint ($p = 1$), (b) root mean square constraint ($p = 2$), and (c) amplitude constraint ($p = \infty$).

される [1], [2]．これを決定する数値的アルゴリズムの詳細については，[2]の6.3を参照のこと．このアルゴリズムにより，図2の注入同期型E級発振器の位相感受関数 $Z(\theta)$ に対し， $p = 1$ の場合の最適位相差は $\Delta\phi_{max} = \pi$ となる．つまり，位相差 π の正負一対のパルスが最適解となる．このときの最適入力波形の様子を図7(a)に示す．

式(3)のとおり，理想的には限りなく細いパルスを想定しているが，ここでは入力電圧を最大 ± 10 V としたために(数値シミュレーションも，これに伴い)幾分太いパルス(発振周期に対するパルス幅の比，すなわち Duty 比=10%)と設定している．

(b) $1 < p < \infty$ の場合

$$f_{opt, p}(\theta) = M \text{sgn}[g(\theta)] \left(\frac{|g(\theta)|}{\|g\|_q} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (4)$$

が最適入力波形となる．ただし， $g(\theta) \equiv \bar{Z}(\theta) + \lambda$ ， $\bar{Z}(\theta) \equiv Z(\theta + \Delta\phi) - Z(\theta)$ ．ここで， $\bar{Z}(\theta)$ に含まれるパラメーター $\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_-$ は，位相结合関数の最大値 $\Gamma(\phi_+)$ と最小値 $\Gamma(\phi_-)$ を与える ϕ_+ と ϕ_- によって定まり， λ はラグランジュの未定乗数である．これらの値は [1], [2] のアルゴリズムにより数値的に得られる．本研究で用いる注入同期型E級発振器の位相感

受関数 $Z(\theta)$ に対し、 $p = 2$ の場合の最適なパラメータの値は $(\Delta\phi, \lambda) = (\pi, 0)$ と一意に得られる．この場合の $f_{\text{opt}, 2}(\theta)$ は、図 7(b) に示すような正弦波に近い形状の連続波となる．

(c) $p = \infty$ の場合

$$f_{\text{opt}, \infty}(\theta) = M \text{sgn}[\bar{Z}(\theta) + \lambda], \quad (5)$$

が最適入力波形となる．ここで、式 (5) に現れる二つのパラメータ $\Delta\phi, \lambda$ は [1], [2] のアルゴリズムにより数値的に決定される．本研究で用いる注入同期型 E 級発振器の位相感受関数 $Z(\theta)$ に対し、この値は $(\Delta\phi, \lambda) = (\pi, 0)$ と一意に得られ、 $f_{\text{opt}, \infty}(\theta)$ は、図 7(c) に示す Duty 比 50% の矩形波となる．

5. 実験における入力波形の最適性の検証

本章では、4. で得られた最適入力波形の最適性をロックレンジを実験測定することにより検証する．実験における入力波形（注入電圧） v_{inj} の生成には、ファンクションジェネレータ (FG) Tektronix AFG1022 を用いた．図 7 のように幾分か歪が見られるものの、本研究で用いる入力波形は全て、小さな誤差の範囲内で精度よく生成可能であることが分かる．同期の成立・不成立は、入力波形 v_{inj} の周波数と、E 級発振器の発振周波数を同時計測し、これらが等しいか否かにより判定される．

図 8 に得られた結果を示す．縦軸は入力振幅を表し、横軸の $\Delta\omega$ は離調を表す．以下、制約条件 (a), (b), (c) ごとにその詳細を説明する．まず、図 8(a) に、(a) の入力の面積を一定とした場合のロックレンジの比較を示す．ここで、 \times の各データ点は数値シミュレーション結果、 \circ の各データ点はそれぞれに対応する異なる入力における実験の結果、実線は式 (1) による理論値を示す．数値シミュレーション結果と実験結果と理論値は例外なく整合している．確かに、入力が位相差 π の正負一対パルスするとき、ロックレンジが最大化されることが確認される．

以上の正負一対のパルス入力の最適性をより詳しく調べるために、これらのパルスの位相差 $\Delta\phi$ の値ごとに、これに対応するロックレンジを求めた．図 9 に示すように、実験結果とシミュレーション・理論結果は良く一致する．例えば位相差 $\Delta\phi = \pi$ の最適なパルス入力 ($\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{max}}$) は、位相差 $\pi/2$ のパルス入力 ($\Delta\phi = \pi/2$) に比べ、約 1.4 倍のロックレンジを実現

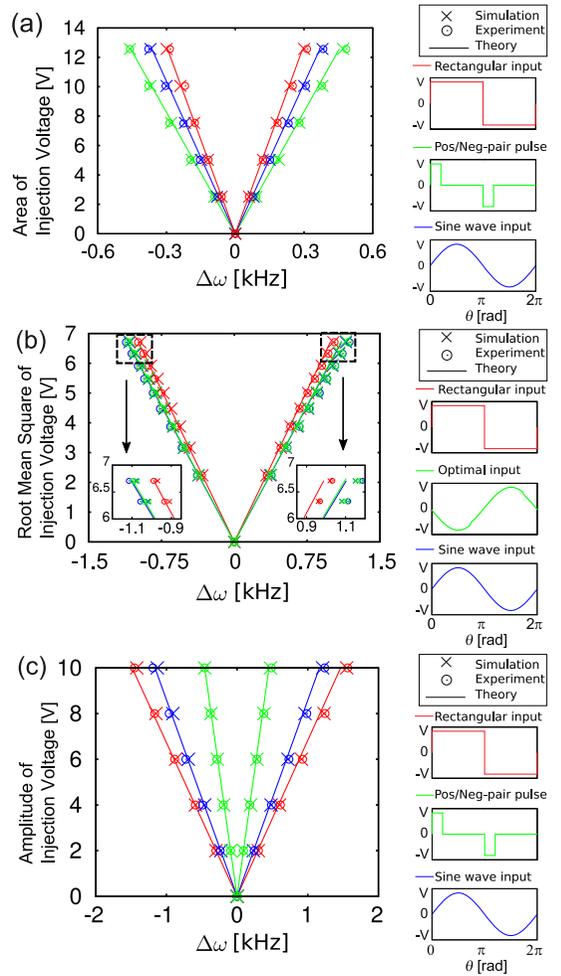


図 8 数値シミュレーション、実験、理論から求めたロックレンジの比較. (a) 入力波形の面積制約 ($|f(\theta)| = M$ 一定) の場合 ($p = 1$), (b) 入力波形の実効値 ($\propto \sqrt{f^2(\theta)} = M$ 一定) 制約の場合 ($p = 2$), (c) 入力波形の振幅 ($|f(\theta)| < M$ 一定) 制約の場合 ($p = \infty$)

Fig. 8 Comparisons of locking ranges under (a) area constraint ($p = 1$), (b) root mean square constraint ($p = 2$), and (c) amplitude constraint ($p = \infty$).

することが認められた．ただし、ここでも入力のパルスを、Duty 比 10% とし、高さ 10 V とした^(注5)．

次に、図 8(b) に、(b) の入力の 2 乗平均（実効値）を一定とした場合のロックレンジの比較を示す．理論から得られた最適入力に対し最大のロックレンジが計

(注5)：入力のパルスを Duty 比 10% としたため、二つのパルスの位相差 $\Delta\phi$ のとり得る最小値は 0.2π となる．これより小さい位相差とすると、二つのパルスが重なり、面積制約を破ることに注意．

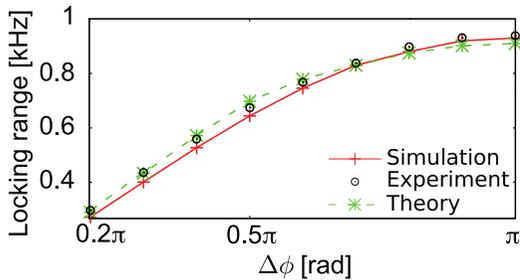


図9 二つのパルスの位相差 ($\Delta\phi$) とロックレンジの関係
Fig.9 Locking ranges for different phase separation ($\Delta\phi$) between two pulses.

測された。また、正弦波入力に対しては、予想にたがわず最適入力よりわずかに狭いロックレンジとなることが認められる。

最後に、図 8(c) に、(c) の入力の振幅を一定とした場合のロックレンジの比較を示す。確かに入力が矩形波のとき、ロックレンジが最大化されることが確認できる。

6. むすび

本研究では、[1], [2] の最適化理論を用い、注入同期型 E 級発振器における引き込み周波数帯 (ロックレンジ) の最大化が可能であることを、理論、数値シミュレーションと回路実験の両面から示した。具体的には、1. の Q1, Q2 にそれぞれ対応して、次の結果を得た。

S1 回路方程式に対して、最適化理論 [1], [2] を適用し、理論的に最適な入力信号波形を得た。入力信号に課される制約条件が面積一定制約の場合は位相差 π の正負一対のパルス波、2 乗平均 (実効値) 一定制約の場合は正弦波に近い入力波形、振幅一定制約の場合は Duty 比 50% の矩形波が最もロックレンジを大きくすることが検証された。

S2 S1 で得られた入力波形は実験においてもロックレンジを最大化することを、(a) 面積制約、(b) 2 乗平均 (実効値) 制約、(c) 振幅制約の三つの現実的な条件下における系統的な実験により確認した。

要するに、1. の問題 Q1, Q2 に対し、いずれも肯定的な結果が得られ、理論的に得られた最適入力波形の最適性が実験系において検証された。われわれの知る限り、ロックレンジを最大化する入力信号の設計とその実験検証は、これまで [8]~[10] の化学振動子において得られているのみであり、実用上有用な電子回路での実証は存在しなかった。また近年では、マイクロ

コンピュータや DA 変換器の高性能化により、任意の波形を生成するコストが下がってきていることから、今後は心臓ペースメーカー等を含むより多様な応用への展開も期待される。

謝辞 日頃ご議論いただく複雑コミュニケーションサイエンス研究会並びに非線形問題研究会の諸氏に感謝します。本研究の一部は平成 27 年度文科省科研費補助金 (課題番号 26286086)、並びに電気通信普及財団研究調査助成を受けて行われた。

文 献

- [1] H.-A. Tanaka, "Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators," *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, vol.47, 402002, Sept. 2014.
- [2] H.-A. Tanaka, "Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.288, pp.1-22, Nov. 2014.
- [3] M. Kazimierczuk, V. Krizhanovski, J. Rassokhina, and D. Chernov, "Injection-locked class-E oscillator," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Regular Papers*, vol.53, no.6, pp.1214-1222, June 2006.
- [4] T. Nagashima, X. Wei, H.-A. Tanaka, and H. Sekiya, "Locking range derivations for injection-locked class-E oscillator applying phase reduction theory," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Regular Papers*, vol.61, no.10, pp.2904-2911, Oct. 2014.
- [5] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [6] H.-A. Tanaka, A. Hasegawa, H. Mizuno, and T. Endo, "Synchronizability of distributed clock oscillators," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Regular Papers*, vol.49, no.9, pp.1271-1278, Sept. 2002.
- [7] 太田大輔, 田中久陽, 毎野裕亮, "同期現象の解析に必要な位相方程式の導出アルゴリズムに関する比較検討," *信学論 (A)*, vol.J89-A, no.3, pp.190-198, March 2006.
- [8] T. Harada, H.-A. Tanaka, M.J. Hankins, and I.Z. Kiss, "Optimal waveform for the entrainment of a weakly forced oscillator," *Phys. Rev. Lett.*, vol.105, no.8, 088301, Aug. 2010.
- [9] A. Zlotnik, Y. Chen, I.Z. Kiss, H.-A. Tanaka, and J.-S. Li, "Optimal waveform for fast entrainment of weakly forced nonlinear oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol.111, no.2, 024102, July 2013.
- [10] H.-A. Tanaka, I. Nishikawa, J. Kurths, Y. Chen, and I.Z. Kiss, "Optimal synchronization of oscillatory chemical reactions with complex pulse, square, and smooth waveforms signals maximizes Tsallis entropy," *Europhys. Lett.*, vol.111, no.5, 50007, Sept. 2015.
- [11] J.M. Rabaey, A. Chandrakasan, and B. Nikolic, *Digital Integrated Circuits: A Design Perspective*, 2nd ed., PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ, 2003.

付 録

1. 数値シミュレーションにおけるパラメータセット
 本論文での実験系は, [4] で用いられている実験系と同一である. すなわち本論文において, (R_{inj} をのぞき) [4] と同じ基板及び部品を用い, [4] で用いた回路上で実験を行った. したがって, 表 1 に記載の大部分の素子の設計値と実測値は, [4] に記載のものと同じである.

本論文の数値シミュレーションにおけるパラメータセット (素子値) を表 A・1 に記載する. 表 A・1 中の設計値は, [4] において注入同期型 E 級発振器が E 級動作条件を満足することを目的として設計された素子値であるが, この設計値を本論文の数値シミュレーションにおける回路パラメータとして用いた. ただし, 3. で述べたように, R_{inj} , C_g , r_g のみ [4] と若干異なる値となっている.

2. スイッチモデルの妥当性について

本論文のシミュレーションにおいて, MOSFET 素子の理想的スイッチモデルを導入した. このモデルでは, ドレイン-ソース間スイッチのオン・オフの切り替わりに対応してドレイン-ソース間の抵抗 R_S の値が不連続的に変化する. そのため, 式 (2) によって定まるベクトル場は不連続性をもち, 解軌道はこれを反映する. 本節では, このようにドレイン-ソース間の抵抗値が不連続的に変化する理想的な場合 (スイッチ

モデルを用いる場合) と, 連続的に変化する現実的な場合を比較し, 両者の整合性を確認する. その結果として, スイッチモデルを用いたとしても, 非現実的なアーティファクトは生じないことの裏付けが得られる.

R_S の値が連続的に変化する現実的な状況を再現するために, スイッチングの不連続性を滑らかに丸める必要がある. これは例えば, 以下のように $R_{S, smooth}$ を設定することで可能になる.

$$R_{S, smooth} \equiv \frac{1}{2} \times (r_{S, OFF} - r_{S, ON}) \times \{1 - \tanh(\alpha(v_f - V_{th}))\} + r_{S, ON}, \quad (A\cdot1)$$

ここで α は, スイッチングを「丸める」度合いを表す係数である. また, [4] の数値シミュレーションに倣い, $r_{S, OFF} = 10 \text{ M}\Omega$, $r_{S, ON} = 0.16 \text{ }\Omega$, $V_{th} = 3 \text{ V}$ とする. 式 (A・1) において, $v_f \rightarrow \infty$ のと

表 A・1 回路中の素子値の比較

Table A・1 Comparisons of calculated and measured values of the circuit elements.

Element	Calculated value	Measured value	Difference
L_C	199 μH	214 μH	7.5 %
L_O	19.9 μH	19.9 μH	-0.20 %
L_f	16.5 μH	16.5 μH	-0.36 %
C_S	1.50 nF	1.46 nF	-2.5 %
C_0	1.75 nF	1.74 nF	-0.68 %
C_1	1.80 nF	1.79 nF	-0.83 %
C_2	17.3 nF	17.4 nF	-0.38 %
R	25.0 Ω	25.0 Ω	-0.090 %
R_{d1}	750 k Ω	752 k Ω	0.20 %
R_{d2}	250 k Ω	249 k Ω	-0.21 %
r_{L_C}	0.0 Ω	0.0100 Ω	-
r_{L_O}	0.0 Ω	0.503 Ω	-
r_{L_f}	0.0 Ω	0.400 Ω	-
R_{inj}	20.0 k Ω	20.0 k Ω	0.0 %
C_{inj}	0.100 μF	0.101 μF	1.4 %
f_{free}	1 MHz	1.0077 MHz	0.77 %
V_{DD}	12.0 V	12.0 V	0.0 %
V_o	9.0 V	8.80 V	-2.2 %
I_c	0.277 A	0.278 A	0.36 %
V_{th}	3.0 V	-	-
r_S	0.16 Ω	-	-
C_g	1.72 nF	1.72 nF	-
r_g	3.0 Ω	-	-

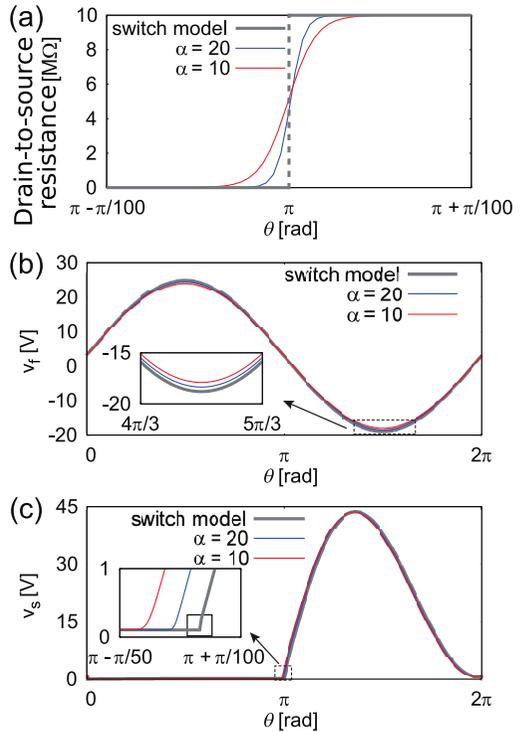


図 A・1 スイッチモデルと, 連続的に変化する $R_{S, smooth}$ の比較. (a) MOSFET 素子のドレイン-ソース間の抵抗値, (b) ゲート-ソース間電圧 v_f , (c) ドレイン-ソース間電圧 v_s

Fig. A-1 Comparisons of the switch model R_S and its smoothing $R_{S, smooth}$. (a) Drain-to-source resistance R_S and $R_{S, smooth}$, (b) gate-to-source voltage waveform v_f , and (c) drain-to-source voltage waveform v_s .

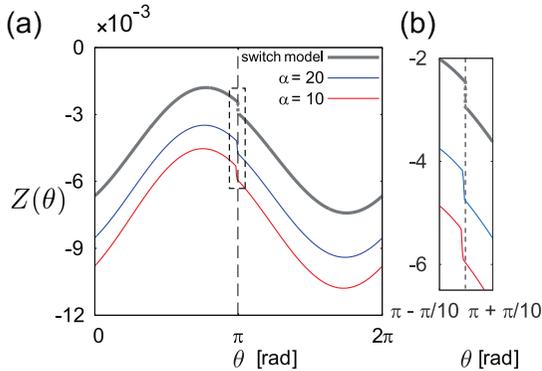


図 A.2 スイッチモデルと、連続的に変化する $R_{S, \text{smooth}}$ に対する位相感受関数 $Z(\theta)$ の比較. (a) $Z(\theta)$, (b) (a) の破線部の拡大

Fig. A.2 Comparisons of $Z(\theta)$ obtained from the switch model R_S and from its smoothing $R_{S, \text{smooth}}$, respectively. (a) $Z(\theta)$, (b) its magnification of the dotted area in (a).

き, $R_{S, \text{smooth}} \rightarrow r_{S, \text{ON}} (= 0.16 \Omega)$ となり, 一方で $v_f \rightarrow -\infty$ のとき, $R_{S, \text{smooth}} \rightarrow r_{S, \text{OFF}} (= 10 \text{ M}\Omega)$ となる. この $R_{S, \text{smooth}}$ とスイッチモデルの比較を図 A.1(a) に示す. α の値が小さくなるほど, 抵抗値の変化がなだらかになることが分かる. ただし, 図 A.1(a) において, 横軸を θ としている. その理由は, 式 (2) のとおり, $R_S = R_S(v_f(t))$ であり, $\theta = \Omega t$ であるからである.

まず, 図 A.1(b), (c) に MOSFET 素子のモデルとしてスイッチモデルを用いた場合と, 連続的に変化する $R_{S, \text{smooth}}$ を用いた場合の波形の比較を示す. 図 A.1(b) は, MOSFET 素子のゲート-ソース間電圧 $v_f(\theta)$ の波形である. 不連続性を「丸める」度合い α が変化しても, 各々の波形の差異はわずかであることが分かる. 図 A.1(c) は, MOSFET 素子のドレイン-ソース間電圧 $v_S(\theta)$ の波形である. MOSFET 素子のモデルとして $R_{S, \text{smooth}}$ を用いた場合の波形は常に滑らかであり, α が大きくなるほどスイッチモデルの場合 ($\alpha \rightarrow +\infty$ に相当) の $\theta = \pi$ で角をもつ波形に漸近することが認められる. したがって, スイッチモデルを用いた場合とこれを丸めた $R_{S, \text{smooth}}$ を用いた場合の両者は, 波形レベルで整合し, スイッチモデルを用いても非現実的なアーティファクトは生じないことが認められる. 以上の観察結果は, 他の全ての変数の波形についても成立するが, これは紙面の制約により省略する.

次に, 図 A.2 に MOSFET 素子のモデルとして不

連続的に変化するスイッチモデルを用いた場合と, 連続的に変化する $R_{S, \text{smooth}}$ を用いた場合にそれぞれ得られる位相感受関数 $Z(\theta)$ の比較を示す. 図 A.2(a) は $Z(\theta)$ の全体像であり, 図 A.2(b) はスイッチがオンからオフに移する位相 π 付近の拡大である. α の値が大きくなるほど, 確かに両者の, 式 (A.1) の位相感受関数 $Z(\theta)$ の一致度が一層高くなることが認められる. 一方, α の値が小さくなるほど $Z(\theta)$ のオフセット ($Z(\theta)$ をフーリエ級数展開した際の定数項) が負の方向に移動するものの, 式 (1) の畳み込み積分の定義より, この $Z(\theta)$ のオフセットは (積分して 0 となり) ロックレンジの大きさに寄与しない. したがって, 図 A.2 でのスイッチの「丸め」の範囲内では, ロックレンジの値は実質影響を受けない.

以上より, MOSFET のドレイン-ソース間の抵抗値が不連続に変化するスイッチモデルを用いる場合と, これを丸め連続的に変化する場合の結果は, 波形 (リミットサイクルの解軌道) のみならず, その周囲で定まる $Z(\theta)$ の両者で一致・整合することが認められる. 結論として, 本論文のスイッチモデルを用いることによる非現実的なアーティファクトは生じないことの裏付けが得られた. すなわち, スイッチモデルによる結果は, これを丸めたモデルの ($\alpha \rightarrow +\infty$) の極限とみなせる. 逆に, スイッチモデルは, 現実的な環境で不連続に変化するスイッチの筋のよい簡素化近似ともみなされる.

(平成 30 年 4 月 6 日受付)



矢部 洋司 (正員)

2012 電通大・電気通信・電子卒. 2014 同大学院修士課程修了. 同年より, 新光電子 (株) 勤務. 2015 より, 電通大学院博士課程に在学中. 注入同期発振器の注入同期能力の最適化に関する研究に従事.



歐陽 有界

2013 北京郵電大学・電子工程・電子卒. 2016 電通大・大学院修士課程修了. 同年, ニューコン株式会社入社, 現在に至る. 在学中は注入同期型 E 級発振器の実験・シミュレーションに関する研究に従事.



中川 正基 (正員)

2005 早大・理工・物理卒。2007 同大学大学院理工学研究科修士課程修了。2012 同大学院先進理工学研究科博士後期課程単位取得退学。2012～2015 同大学先進理工学部応用物理学助手。2015 年 3 月博士(理学)。同年より、広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻研究員。2016 同大クロマチン動態数理研究拠点特任助教。2017 電通大大学院情報理工学研究科研究員、現在に至る。注入同期現象や自律分散通信ネットワークなどの工学的応用研究、触媒反応ネットワークやクロマチン動態などの生命科学数理モデル解析、非線形力学(特にカオス・エルゴード理論)の研究に従事。



宇都宮健介

2018 電通大・情報理工・情報-通信工学卒。同年、パーク 24 (株) 入社、現在に至る。在学中は注入同期型 E 級発振器のロックレンジ最大化に関する研究に従事。



永島 和治 (正員)

2011 千葉大・工・情報画像卒。2015 同大大学院博士後期課程修了。同年日本学術振興会特別研究員 (PD)。主として、スイッチング電源、無線電力伝送システムに関する研究に従事。博士(工学)。



関屋 大雄 (正員)

1996 慶大・理工・電気卒。2001 同大大学院博士課程了。同年千葉大・大学院自然科学研究科・助手。現在、同大学院融合科学研究科・教授。2007～2009 Wright State University 訪問研究員。主として、電力増幅器、通信の信号処理に関する研究に従事。博士(工学)。2008 船井情報科学奨励賞、同年安藤博記念学術奨励賞、同年エリクソンヤングサイエンティストアワードをそれぞれ受賞。IEEE シニア会員、情報処理学会、信号処理学会各会員。



田中 久陽 (正員：シニア会員)

1990 早大・電気卒。1992 同大学大学院理工学研究科修士課程修了。1995 同大学院理工学研究科博士後期課程修了。博士(工学)。同年より、日本学術振興会特別研究員 (PD)。1996 カリフォルニア大バークレー校客員研究員。1997 ソニーコンピュータサイエンス研究所研究員。2001 電通大電気通信学研究科助教授。現在、同大学情報理工学研究科・教授。情報通信システム、非線形物理等の分野横断的領域の研究に従事。2006, 2007, 2009 第 22 回電気通信普及財団賞(テレコムシステム技術賞)、第 23 回、第 25 回電気通信普及財団賞(テレコムシステム奨励賞)各受賞。2015 電子情報通信学会 平成 27 年度 NOLTA ソサイエティ功労賞受賞。著書に「非線形ダイナミクスとカオス 数学的基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで」(中尾裕也、千葉逸人と共訳 2015) 等がある。