

非線形問題とヘルダーの不等式

Nonlinear Problems and Hölder's Inequality

田中久陽 Hisa-Aki TANAKA



アブストラクト ヘルダーの不等式は、1888年数学者のロジャーズと1889年ヘルダーにより独立にその基礎が見いだされ、以降、関数解析等の解析学の基本的不等式として日常的に多用されている。しかし、意外なことに、この不等式の物理的解釈の例は、2014年ようやく知られるようになった。本稿は、この不等式が最近の非線形問題の未解決な問題のエレガントな解答を与え、更に情報通信分野にも浸透しつつある Tsallis (ツァリス) 統計の一つの基礎にもなり、更に現代制御理論を補強する可能性について解説する。

キーワード ヘルダーの不等式, 不等式の物理的解釈, 非線形問題, Tsallis (ツァリス) 統計, 現代制御理論

Abstract Since the basis of Hölder's inequality was found by mathematicians, *i.e.*, independently by Rogers in 1888 and Hölder in 1889, the inequality has been frequently utilized as a basic inequality in mathematical analysis such as functional analysis. However, surprisingly, no physical interpretation of the inequality was introduced until 2014. In this article, I show that the inequality gives an elegant solution to a recent open nonlinear problem. It is also asserted that the inequality can be a fundamental basis in Tsallis statistics, studied recently in information and communications technology. Furthermore, it is argued that the inequality can make a useful addition to modern control theory.

Key words Hölder's inequality, physical interpretation of the inequality, nonlinear problem, Tsallis statistics, modern control theory

1. はじめに

本稿では、非線形性や最適性が本質となる幾つかの問題で筆者の最近経験したことを紹介し、非線形問題並びに関連する分野には、まだまだ紙と鉛筆で開拓する余地の多いことを示したいと思う。そこで唐突ではあるが、まず、敬愛する先輩である SF 作家の先駆的な論考の冒頭部分を引用しよう。本稿の文脈では、以下の「SF」や「ファン」という字句を、それぞれ「非線形問題、情報理論、信号処理」や「研究者」などと適宜読み換えて頂きたい。

『SFという、このいわば未知の大陸へ、SFファンたちは、それぞれの動機で、上陸し、孤独な探検に旅立っていった。そして、SFというこのファンの心情を捉えて離さないジャンルを、人はそれぞれ、興味や知識や生活環境などの個別的な背景と照合して、さまざまな受けとり方をする。

僕たちが、ファンの溜り場の中でする議論も、ちょうど大陸の探検者たちが、酒場のテーブルをかこんで、いい争う光景をおもわせる。この不思議な未知の大陸の正体について、どこに

起源をもち、今後どう発展し、その本質が何であるか、何でありうべきなのか、そういったことがらを本当にわかっている者は、実のところただのひとりもないのだ。

僕自身だって、かれこれ十数年以上も SF を読みつづけ、考えながら、これらの間に正しい解答を見つけたとは決していえない。またいいきれぬ自信だってない。

としても、この SF の大陸の探検時代を、なるべく早くおわらせて、そこから、資源を、収穫をつかみとることのできる段階へ進展させたいとも願うのである。むろん、それが恒久的、永遠不変だといいきれるはずはないが、ともかく、試みにでも一本の鉄道を敷設してみよう、それによってこの大陸から何らかの価値を運び出せたらという文字通りの野心が、この小論の意図でもある。(荒巻義雄「術の小説論」¹⁾から)

非線形性や最適性という一筋縄ではいかない大陸に、1本の有用な鉄道を敷設できないものだろうか？ それも、お金(=大型研究予算)や大規模土木工事(=超高度な数学、あるいはマンパワー)に頼らずに！意外なことに、その余地は今の時代にもありそうである。このことを以下の各章で例証していこう。ここで必要となる「土木工事」は、ヘルダーの不等式という初等的な不等式と、紙と鉛筆と安価なパソコンのみによる...そして土木工事の対象となるのは、注入同期と呼ばれる有用な技術の性能向上限界(2.)、一般化フィッシャー情報、クラメール・ラオの不等式や Tsallis エントロピー最大化(3.)、更に適用対象は限定されるものの、ポントリヤギンの最大値原理を補強

田中久陽 正員：シニア会員 電気通信大学大学院情報理工学研究所

E-mail htanaka@uec.ac.jp

Hisa-Aki TANAKA, Senior Member (Graduate School of Informatics and Engineering, University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182-8585 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ

Fundamentals Review Vol.9 No.3 pp.219-228 2016年1月

©電子情報通信学会 2016

する一つの観点(4.)である。

2. 注入同期の最適化問題

現在の情報通信の基盤として、「注入同期 (injection locking)」という技術は、近年、地味に注目を集めているトピックである。注入同期現象とは自励発振器（非線形振動子）に外部信号を強制注入すると発振器が外部信号に同期する基本的な物理現象である。これを利用する技術は真空管時代に端を発し、現在のミリ波等の高周波数帯での利用、省電力設計、回路の微細化の要請から、現在リバイバルが進んでいる。例えばミリ波帯を用いるベースバンド通信において、注入同期回路は通信の品質を保证する必須構成要素である。図1に示すようにベースバンド通信では、送信側は高レート（高周波）のデータ信号そのものを搬送波にダイレクトに重畳して送信し、受信側はこの「搬送波」を外部信号（入力）として、受信機の発振器の注入同期により、搬送波の周波数に正確に追従、同期する。これにより、送信されたデータ信号が正しく復号、受信されることになる。このベースバンド通信を用いると、例えばPCやビデオのような機器内部の大容量のデータ通信に必要な配線が近距離無線により置き換えられ、大量の配線が削減される大きなメリットが生じる。このような背景で、VLSI技術のオリンピックと呼ばれる国際会議ISSCCでは、注入同期回路に関連する発表が過去数年間、継続的に報告されている（例えばソニーは3年連続して、その研究成果を発表している⁽²⁾）。

一方で、サイエンスとしての重要性からも Nature, Science 誌等を筆頭に注入同期に関連する物理や生体リズム（生物時計）の研究が継続的に報告されてきている。ここでは、注入同期は周波数引き込み (entrainment) と呼ばれることが多く、この引き込みを外れたところで不規則遷移現象⁽³⁾が見いだされたことも衆知のとおりである。また、この引き込みが非線形振動子集団のパターン形成の基礎にもなっている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。ところが、この注入同期において引き込みの成り立つところで、かつ単一の振動子であっても、その物理限界（実現可能限界）には一つの未知の仕組みが潜んでいた。これを以下で説明しよう。

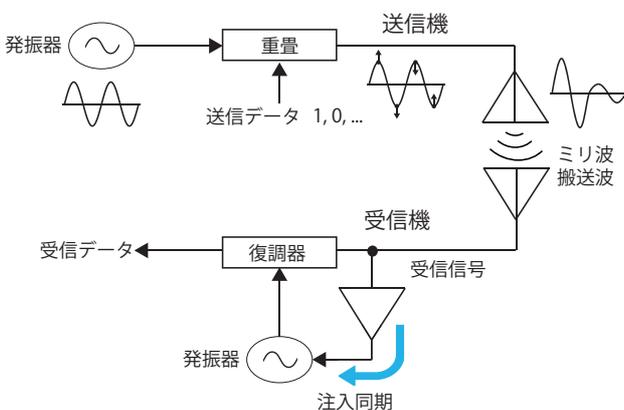


図1 注入同期の応用例：ベースバンド通信 ((43)より転載)

2.1 注入同期の解析の一つの枠組み

まずはじめに、注入同期の解析を目的として利用可能な解析的アプローチについて概説する。注入同期の性能を評価する尺度として、ロックレンジ (locking range) は重要である。ロックレンジとは注入同期が成立する外部信号（入力）の周波数帯域のことであり、これが広がれば、より柔軟かつロバスタな注入同期が得られるからである。これを図2(A)に示す。ここで、縦軸の $\Delta\omega$ は発振器の自励発振周波数と入力周波数の差（離調）を表し、横軸は入力の強度を表す。この、くさび状のロックレンジ^(注1)すなわち同期化領域⁽³⁾の外では、同期が成立せず利用不可能となる。以下では入力の強度が十分小さな、弱入力の場合を仮定する。この仮定は、先に述べたベースバンド通信などの現在の電子機器においても、入力（電流）がデバイスを損傷しないために、また省電力性の要請からも、自然で合理的なものである。

工学分野での注入同期の先行研究は、アドラー⁽⁶⁾に始まり、その後、黒川⁽⁷⁾、大黒⁽⁸⁾と一般化が進み、かつ解析の対象も広がっているが、その本質は、次のいわゆるアドラーの方程式により理解される。

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Delta\omega - \epsilon \sin \alpha \quad (1)$$

ここで α は発振器の発振位相と入力信号の位相差を示し、 $\Delta\omega$ は離調を示す。これによって、ロックレンジが定まるのみならず、同期へ至る過渡状態や同期の安定性解析が可能になる。この先行研究の枠組みは、現在でも諸々の対象に適用されている。

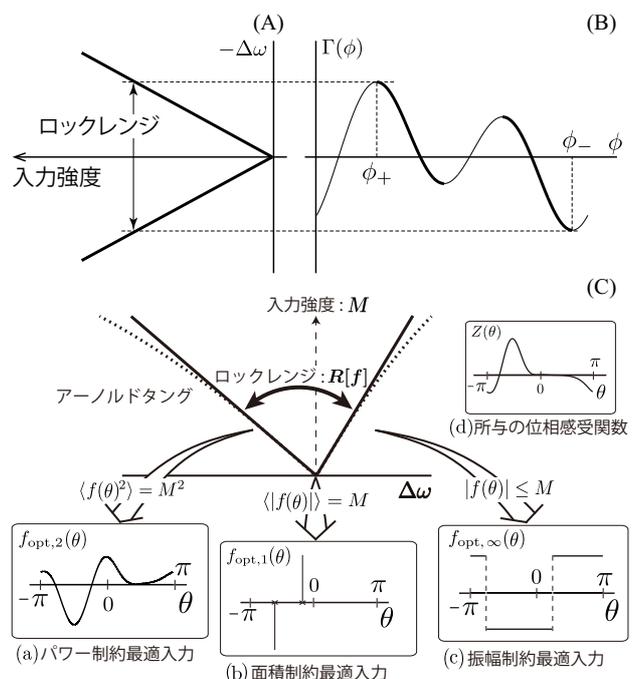


図2 (A) ロックレンジ, (B) 位相結合関数, (C) 最適入力の様子 ((43)より転載)

(注1)：非線形ダイナミクス分野では、これをアーノルドタンクと呼ぶ。

(例として文献(9)(10))が、その前提条件が発振器は弱非線形、かつ入力はほぼ正弦波と仮定しており、発振器の非線形性が強い場合や、入力が正弦波から大きく外れる場合には、その適用が一般に困難となる。

次にアドラーの方程式(1)の一般化とみなされる、位相方程式の導出と、それによる注入同期の解析について説明する。ここで扱う発振器はリミットサイクル解を持つ非線形振動子とみなせる。そのダイナミクスは一般に、次の方程式に従う。

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + I(t) \quad (2)$$

ここで、 $x \in \mathbf{R}^n$ は状態変数、 $I(t) \in \mathbf{R}^n$ は周期的入力を表す。ここでは、簡単のため(一般性を失わず)、入力 $I(t)$ は回路中の1点に注入される入力 $f(t) \in \mathbf{R}$ とする。このとき、リミットサイクル解を $x_0 \in \mathbf{R}^n$ とすると、これに沿って発振位相に相当する $\psi \in [0, 2\pi] \equiv S$ という(局所的な)変数が導入される。その結果、入力 f が弱入力という仮定の下で、式(2)は $x = x_0$ の近傍において次の ψ についての方程式に縮約される。

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + Z(\psi) \cdot f(t) \quad (3)$$

ここで、 ω は自励発振周波数、 $Z(\psi)$ は位相感受関数と呼ばれる周期関数である。更に入力の周波数を $\Omega (\sim \omega)$ とすると、 ψ に代わる変数 $\phi = \psi - \Omega t$ が定義される。これは発振状態と入力の位相差に対応する「遅い」変数とみなされ、速い動きに関する平均化により、 ϕ について閉じた次の位相方程式が得られる。

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma(\phi), \quad (4)$$

ただし $\Gamma(\phi) = \langle Z(\theta + \phi)f(\theta) \rangle$ 。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は θ についての1周期にわたる平均^(注2)を示し、 $\Gamma(\phi)$ は位相結合関数と呼ばれる。以上の局所変数 ψ の存在や、式(4)の位相方程式への縮約は数学的に厳密な結果であり⁽¹¹⁾、非線形物理の分野でも独自に同等の結果が得られている⁽⁵⁾。なお、式(1)のアドラーの方程式は式(4)の一つの例とみなされる。本稿では、式(3)や式(4)への縮約を以降「位相縮約」と呼ぶ。

図2(B)はロックレンジの導出を説明している。注入同期が成立するための必要十分条件は、 ϕ が $d\phi/dt = 0$ かつ $\Gamma'(\phi) < 0$ を満たすことであり、位相結合関数の最大値 $\Gamma(\phi_+)$ と最小値 $\Gamma(\phi_-)$ の範囲内に離調 ($-\Delta\omega$) が入っていることが導かれる。

以上は、1:1引き込み(すなわち、 $\omega : \Omega \approx 1:1$)の場合であるが、同様のことが $m:n$ 引き込み(すなわち、 $\omega : \Omega \approx m:n$)の場合に成立する。その場合の位相方程式は、

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma_{m/n}(\phi), \quad (5)$$

ただし $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$ となる。上記の位相感受関数 Z は、これまで工学分野でも独自に見いだされ、ISF⁽¹²⁾やPPV^{(13)(注3)}と呼ばれている。実際に所与の発振器に対し位相方

(注2): 具体的には、 $\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdot d\theta$ である。

(注3): 文献(13)では、式(4)を式(1)のアドラーの方程式と対比して、一般化アドラー方程式と呼んでいる。

程式を導く際、この Z を正確にかつ効率良く求めることが重要である。これは例えば文献(14)(15)のような複雑な発振器に対しても、インパルス応答関数法⁽¹⁶⁾により、回路シミュレータ(SPICE)から直接に、数値的に得ることが可能になっている。

2.2 最適入力の存在: 変分法によるアプローチ

以上の準備の下で、注入同期を最適化する最適化問題が定式化される⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。例えばロックレンジを最大化する場合は、以下のように考える⁽¹⁷⁾。まず、入力 f に対し、次の汎関数を定義する。

$$J[f] \equiv R[f] + \lambda \langle f(\theta) - C \rangle \quad (6)$$

ここで、 $R[f]$ は f に対し(図2(B)のように、一般に一意に定まる)ロックレンジを与え、具体的には

$$R[f] = \Gamma(\phi_+) - \Gamma(\phi_-) \\ = \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} f(\theta) \rangle \quad (7)$$

と表示される。ここで ϕ_+ 及び ϕ_- は、それぞれ位相結合関数 $\Gamma(\phi)$ が最大・最小となる ϕ を表している。また、 $\langle f(\theta) - C \rangle = 0$ は入力 f の1周期平均が C となる制約条件であり、特に $C = 0$ のときチャージバランス制約と呼ばれる。これはつまり、注入される正味の電荷がゼロになるという制約である。また式(6)の λ はラグランジュの未定乗数である。要するに式(6)により、 $\langle f(\theta) \rangle \equiv C = 0$ という制約を満たす f のうち、 $R[f]$ を最大にする最適解 f_{opt} を決めるための (f, λ) についての極値問題が定式化される。

この極値問題が一意に解を持つためには、もう一つ制約条件が必要である。例えばパワー = 一定とした入力、すなわち、 $\langle f^2(\theta) \rangle = \text{一定}$ という制約条件を課すと、その最適解 f_{opt} は、変分法を用いて

$$f_{\text{opt}}(\theta) = \frac{1}{2\lambda} \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} \quad (8)$$

と求まり、その極大性も確認される⁽¹⁷⁾。ここで $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{Q/P}$ 、ただし $P = \langle f^2(\theta) \rangle$ 、 $Q = \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\}^2 \rangle$ であり、 ϕ_{\pm} は Z についての非線形方程式から数値的に得られる⁽¹⁷⁾。またロックレンジを最大化する代わりに、引き込み状態の(線形)安定性を最大化することも可能である。この場合は $R[f]$ の代わりに $S[f] = -\Gamma'(\phi_*)$ として、その極値問題に帰着する^{(18)(注4)}。

以上においては、変分法(オイラー・ラグランジュ方程式)が用いられ、これによる最適解は式(8)の ϕ_{\pm} に対し、一般に複数得られることが判明した。しかし、その他にも最適解があるのか、更にそれらの中でベストな最適解(すなわち物理的限界)とは何であるか、についての情報は変分法によっては原理的に得られず、もやもやした感じが残っていた。

(注4): ここで ϕ_* は式(4)の定常解を示し、一般性を失わず 0 と置いてよい。

2.3 注入同期の物理限界の存在: 不等式によるアプローチ

ところが, 最近の筆者の研究⁽¹⁹⁾により, このベストな最適解の存在や非存在, 更により広いクラスの制約条件下での最適解が議論でき, 注入同期の物理限界の存在が明らかになってきた. 例えば, 以下の基本的な問題は応用上も重要であるが, これらが解答可能となる.

P1 上で述べたパワー制約された入力 ($\langle f^2(\theta) \rangle = P = \text{一定}$) に対し, 1:1 引き込みのロックレンジを最大化するものは存在するか? もし, 存在するならば, それは唯一か? また, その最大ロックレンジの物理的な意味はどのように特徴付けられるのか?

P2 上記のパワー制約入力に代わり, 面積制約された入力 (つまり, その値の絶対値の積分が一定値に抑えられた入力) に対し, 1:1 引き込みのロックレンジを最大化するものは存在するか?あるいは振幅制約された入力 (つまり, その絶対値が一定値以内に抑えられた入力) の場合はどうか? それらはどのように特徴付けられるのか?

P3 以上での 1:1 引き込みの最適化問題は, 一般の $m:n$ 引き込みの場合にも成り立つか? もし, そうならば, その場合の最大ロックレンジはどのように特徴付けられるのか? また, 1:1 引き込みの場合とどのような関係があるのか?

これらの基本問題 **P1**, **P2**, **P3** に対し, ある意味で完全な解答が可能であることを (以下の **S1**, **S2**, **S3** において) 示す. その準備として, まず入力 f の属すクラスとして p 乗可積分な関数 $L^p(S)$ を仮定しよう.

$$\|f\|_p \equiv \langle |f(\theta)|^p \rangle^{1/p} = M < \infty, \quad (9)$$

ただし, $p \geq 1$ であり, M は正定数とする. 特に $p = 2$ の場合, 式 (9) は $\langle f^2 \rangle = M^2$, すなわち f のパワーが M^2 に制約されることを示す. また, $p = 1$ の場合, $\langle |f| \rangle = M$, すなわち f の「面積」が M に制約される. 一方, $p = \infty$ では式 (9) は $\|f\|_\infty = M$ に相当し, $\|f\|_\infty$ は $|f(\theta)|$ の本質的上限 (ess. sup) なので $|f(\theta)| < M$ (ほとんど全ての $\theta \in S$) となる. 要するに, これらの f には微分可能性や連続性も必要とせず, 2.1 の変分法によるアプローチで暗黙に仮定していたよりも広いクラスの関数となっている.

更に, 式 (9) に加え, 先に述べたチャージバランス制約を導入する.

$$\langle f(\theta) \rangle = 0. \quad (10)$$

以上の下で, 2.1 でのパワー制約の下での注入同期のロックレンジの最大化は, 次の最適化問題として定式化される. 愚直に書くと

$$\begin{aligned} & \text{maximize } R[f] \\ & \text{subject to } \langle f(\theta) \rangle = 0, \|f\|_p = M \end{aligned} \quad (11)$$

となるが, 2.1 と同様に, 少し工夫をして, $\|f\|_p = M$ の下で $J[f] = R[f] + \lambda \langle f(\theta) \rangle$ を最大化する f と λ を求める問題に焼き直すことができる. 更に, この $J[f]$ は, 式 (7) により次のように二つの関数 f と g の内積として表示が可能である:

$$J[f] = \langle f(\theta) [\bar{Z}(\theta) + \lambda] \rangle \equiv \langle f(\theta) g(\theta) \rangle, \quad (12)$$

ただし $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$, $\bar{Z}(\theta) \equiv Z(\theta + \Delta\phi) - Z(\theta)$ 及び $\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_-$ であり, この $\Delta\phi$ は変数 θ の座標変換 $\theta + \phi_- \rightarrow \theta$ により自然に導入された. 一方, 引き込み状態の (線形) 安定性最大化は, 式 (11) において $R[f]$ を単に $S[f] = -\Gamma'(\phi_*) = -\langle f(\theta) Z'(\theta) \rangle$ と置き換えればよい. したがって, この場合は式 (12) の $g(\theta)$ を $g(\theta) = -Z'(\theta)$ と置けば, 同様の議論が可能となるので, 以下ではロックレンジ最大化の $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$ の場合のみを考える.

2.1 では, この $J[f]$ の最大化に変分法を用いたが, 式 (12) を見れば, この問題はしかるべき構造を持つことに気が付く. そのキーとなるのが, 次のヘルダーの不等式 (Hölder's inequality)⁽²⁰⁾である^(注5).

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (13)$$

ただし, この p, q は $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を満たす. この式 (13) から, 式 (12) の $J[f]$ を最大化することは,

$$\begin{aligned} J[f] &= \langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle \\ &= \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = M \|g\|_q \end{aligned} \quad (14)$$

において全ての等号が成立する入力 f を, 所与の $g (= \bar{Z}(\theta) + \lambda)$ について求めることに帰着する. 誌面の制約から詳細はほかに譲り (先の **P1**, **P2**, **P3** にそれぞれ対応して) 得られる結果を以下に整理しよう. その大枠は, 図 2(C) の (a), (b), (c) に示すように, $1 < p < \infty$ (特に $p = 2$), $p = 1$, $p = \infty$ の 3 通りに分類される^(注6). 各々の概要は以下のとおりである.

S1 $1 < p < \infty$ の場合, 1:1 引き込みにおいて, 最適入力 ($\equiv f_{\text{opt}, p}$) は $L^p(S)$ 内で唯一存在する. この $f_{\text{opt}, p}$ は, Z により陽に与えられ, このベストな最適入力に対応する最大ロックレンジとは, ヘルダーの不等式 (13) の右辺にほかならない.

S2 $p = 1$ の場合の 1:1 引き込みにおいても最大ロックレンジに上限が存在する. 一般的な Z に対し $L_1(S)$ 内でしかるべき正負一対のパルス入力 ($\equiv f_{\text{opt}, 1}$) を設計することにより, この上限へパルスの幅を細くするにつれ, 幾らでも漸近可能である. このパルス入力の形状は上記の **S1** での最適入力における $p \rightarrow 1$ の極限と整合し, このロックレンジの上限は, ヘルダーの不等式 (13) の右辺で $p = 1, q = \infty$ と置いたものに相当する. 一方, $p = \infty$ の場合の 1:1 引き込みにおいて, 最適入力 ($\equiv f_{\text{opt}, \infty}$)

(注5): 実は式 (13) の不等式は, 1888 年のロジャーズの論文, 1889 年のヘルダーの論文にもなく, その後 Riesz によって示されたものである. しかし, 上記のロジャーズの論文には式 (13) に近い不等式が例題として導かれている. したがって式 (13) を Rogers-Hölder-Riesz の不等式, あるいはロジャーズの不等式と呼ぶのが筋である. しかし, ここでは慣例に従いヘルダーの不等式とする.

(注6): 本稿では, 周期的自発発火を示す Hodgkin-Huxley ニューロンモデル⁽¹⁸⁾ から得られる Z を一例とする. これは, 図 2(C) の (d) 及び図 3(c) に示すとおりである.

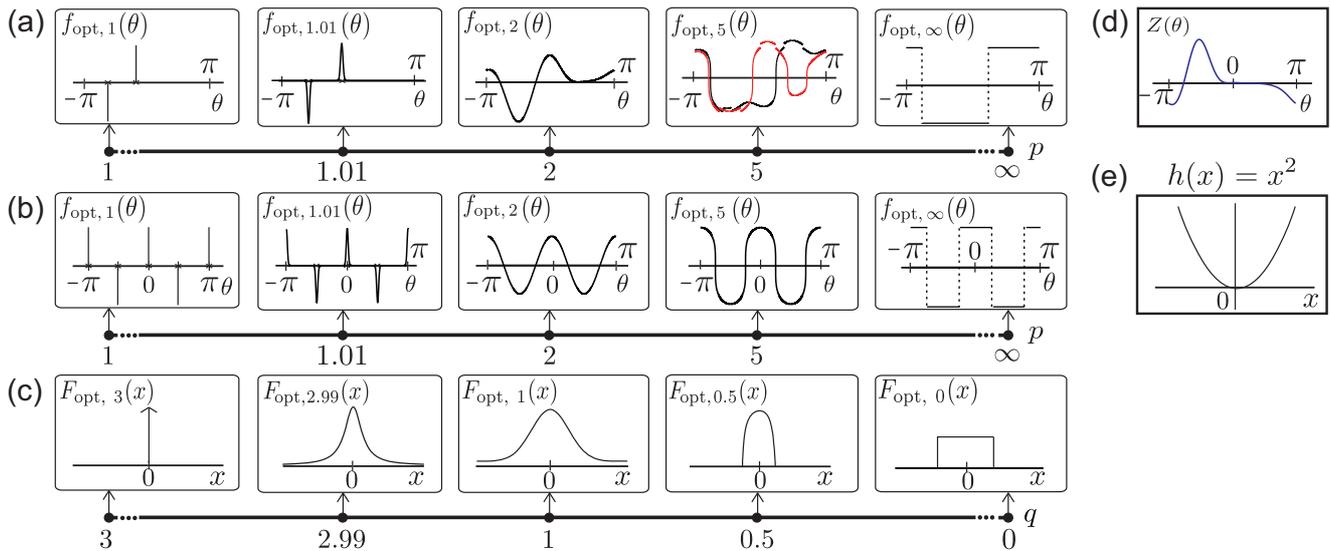


図3 最適注入同期の概要と Tsallis エントロピー最大化の概要

は $L_\infty(S)$ 内で唯一存在し、 Z により陽に表示され、S1 の最適入力 $p \rightarrow \infty$ の極限に一致する。これに対応する最大ロックレンジは、ヘルダーの不等式の右辺で $p = \infty, q = 1$ と置いたものに相当する。

S3 ここでは簡単のため Z, f 、及び以下で定義する Z_n, f_m はいずれもフーリエ級数表示が可能なクラスの関数とする：

$$\begin{aligned}
 Z(\theta) &= a_0/2 + \sum_j (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta), \\
 f(\theta) &= c_0/2 + \sum_k (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta), \\
 Z_n(\theta) &\equiv a_0/2 + \sum_j (a_{nj} \cos nj\theta + b_{nj} \sin nj\theta), \\
 f_m(\theta) &\equiv c_0/2 + \sum_k (c_{mk} \cos mk\theta + d_{mk} \sin mk\theta)^{\text{注7)}.
 \end{aligned}$$

また対応する $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$ も、 Z, f のフーリエ級数から項別積分により、フーリエ級数表示可能とする。このとき三角関数の積和の公式から

$$\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z_n(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle = \langle Z_n(m\theta + \phi)f_m(n\theta) \rangle$$

である。この式は、S1, S2 で得られている 1:1 引き込みの最適入力を得るアルゴリズムにおいて、 Z を Z_n と置き換えるのみで一般の $m:n$ 引き込みの最適入力が $f_m(n\theta)$ の形で得られることを示す^(注8)。図3の(a), (b) はそれぞれ 1:1 引き込みと 1:2 引き込みの最適入力を示すが、1:2 の場合は 1:1 の場合に比べ波形がシンプルになっている。これは Z_n (ただし、ここでは $n = 2$) において、図3(c) に示す元の Z での高調波からの寄与が少なくなるためであり、一般に n が大きくなるにつれこの傾向が顕著になる⁽²¹⁾。

これらの結果により、P1, P2, P3 への解答が得られた。以

(注7): 直観的には Z_n, f_m はそれぞれ Z, f のフーリエ級数を n_j, mk 項のみ残して間引いたものである。

(注8): ただし、 $m:1$ の引き込みの場合のみ例外的に、その最適入力が ($m:m = 1:1$ 引き込みの場合と一致するため) 存在しないことになる。しかし、これが漸近的には、1:1 引き込みの最適入力と一致するとみなすことは可能である。

上の S1, S2, S3 及びこれらに関する最適化アルゴリズムの基礎として、幾つかの定理が得られている⁽¹⁹⁾。御利益として、2.1 の先行研究^{(17), (18)}ではできなかったことが可能になる。それは例えば、次の事柄である。① 「注入同期の物理限界」の存在証明・本質を示すこと、② パルス入力の取扱、③ ロックレンジの最大化、安定性の最大化、一般の $m:n$ 引き込みでの最適化問題が系統的に解答可能となること。要するに、以上により弱入力の場合の注入同期の物理限界に対し、一般的に成立する「基本法則」のようなものがあると分かった。

3. べき分布に絡む最適化問題

それでは、この「基本法則」が当てはまる「物理」はほかにもあるだろうか？ 実は、近年、地味に盛り上がっている Tsallis (ツァリス) 統計⁽²²⁾が該当する。この Tsallis 統計は、従来のシャノンエントロピーを基礎とするボルツマン-ギブズ統計の一般化として、Tsallis により Tsallis エントロピーの導入により切り開かれ⁽²³⁾、その後、理論的整備・体系化が進んでいる⁽²⁴⁾。この Tsallis 統計により物理のべき分布に絡む本質的に非線形な諸問題に有効な解析のツールが提供され、その結果膨大な数の論文が出版されてきた⁽²²⁾。一方、情報通信分野においても相当数の論文が出版されている (例えば Sharma⁽²⁵⁾)。渋滞時のトラフィックに関するべき分布の情報が得られているとき、これが Tsallis エントロピーを最大化する Tsallis 統計に従うという仮定の下で待ち行列やバッファのオーバフロー率など諸々の性質が解析的に与えられるからである。

まず Tsallis エントロピーを定義しよう。連続版の Tsallis エントロピーは、ある物理量 x の確率密度分布 $f(x)$ に対し、次で定義される量 (汎関数) により与えられる^(注9)。

$$S_q[f] \equiv \frac{1 - \langle f(x)^q \rangle_x}{q - 1}, \quad (15)$$

ただし、 q は (通常、正の値の) 与えられたパラメータであり、

(注9): x が離散的な値をとる場合は須藤⁽²⁴⁾の説明が詳しい。

$\langle \cdot \rangle_x$ は $\langle \cdot \rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dx$ を示す。Tsallis エントロピー最大化の問題とは、 f の規格化条件 $\langle f \rangle_x = 1$ と、以下に定義される f に対するエスコート関数 F の制約下で、この式 (15) を最大にする $f_{\text{opt}, q}$ を求めるものである。具体的には、次で与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } S_q[f] \\ & \text{subject to } \langle f(x) \rangle_x = 1, \langle h(x)F(x) \rangle_x = \sigma^2, \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、この F は f に対するエスコート関数: $F(x) \equiv f(x)^q / \langle f(x)^q \rangle_x$ であり、例えば $h(x) = x^2$ とすると、 F の二次モーメント $= \sigma^2$ と制約される^(注10)。この枠組みの御利益の一つは、Tsallis エントロピーを最大化する分布関数 $f_{\text{opt}, q}$ は、 $1 < q < 3$ の q に対し、その裾野においてべき指数 $= \frac{2}{q-1}$ を持つべき分布を与えることであり、このことが冒頭に述べた諸々の分野での応用^{(22) (25)}に結び付いている。

3.1 ヘルダーの不等式から見た Tsallis エントロピー最大化

以上の極値問題の解の構成・唯一性などに関する厳密な証明は比較的最近文献 (26) により、初めて与えられている。では、これまではどうだったかという、文献 (22) にあるように極値を与える解の必要条件としてオイラー・ラグランジュの方程式 (変分法) からのアプローチのみであった^(注11)。古市⁽²⁶⁾の方法は、相対エントロピーの一般化 (Tsallis relative entropy) の導入から始め、エントロピーを最大化する関数 (q -ガウス分布 = q -Gaussian distribution) と任意の分布関数のエントロピーを相対エントロピーを経由して比較することにより、必要十分条件として q -ガウス分布が極値問題の解になることを示している。この方法はエレガントであるが、 q -ガウス分布をあらかじめ与えた地点からスタートするので、そもそも、この問題の枠組みからなぜ q -ガウス分布が現れるかというメカニズムについての情報は多くない。一方、筆者らのヘルダーの不等式による方法は、これとは大きく異なる「構造的な」証明を与える⁽²⁷⁾。そのあらまは以下のとおりである。まず、簡単な変形により、式 (15) は以下と等価であることが分かる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{f(x)} \\ & T_q[f, \lambda] \equiv \sigma^2 \langle f(x)^q \rangle_x + \lambda \langle (x^2 - \sigma^2) f(x)^q \rangle_x \\ & = \langle f(x)^q [\lambda x^2 + (1 - \lambda) \sigma^2] \rangle_x, \\ & \text{subject to } \langle f(x) \rangle_x = 1, \end{aligned} \quad (17)$$

ただし $0 < q < 1$ 。一方、 $q > 1$ 並びに $q < 0$ の場合は T_q の最小化となる^(注12)。ここで式 (17) の f^q と $\lambda x^2 + (1 - \lambda) \sigma^2$ を、それぞれ式 (12) の f, g とみなせば、2.3 でのヘルダーの不等式を用いた論法が、ここでも同様に適用され、元の式 (15) の最

適解 $f_{\text{opt}, q}$ の構成・唯一性についての議論が可能になる。ここでは計算の詳細を省略するが、この $f_{\text{opt}, q}$ はヘルダーの不等式の等号成立条件から以下のとおり得られる。

$$f_{\text{opt}, q}(x) = \frac{1}{Z_q} \exp_q \left(-\frac{\beta_q x^2}{\sigma^2} \right), \quad (18)$$

ただし、 $\exp_q(\cdot)$ は q -指数関数^{(22) (24) (26)}と呼ばれ、次のように定義される。

$$\exp_q(x) \equiv \begin{cases} [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, & (1 + (1 - q)x > 0 \text{ なる } x) \\ 0, & (\text{それ以外の } x) \end{cases} \quad (19)$$

この q -指数関数 (19) に対応し、式 (18) が先に述べた q -ガウス分布と呼ばれるものである。また Z_q は q, σ により定まるパラメータ、 β_q は q のみに依存するパラメータである^{(22) (24) (26)}。

以上の「構造的」証明の御利益は以下のとおりである。まず、先行研究⁽²⁶⁾で (文献 (26) の方法でも不可能ではないと考えられるもの) 実行されていない、 $q < 0$ の場合の取扱、並びに確率変数 $x \in \mathbf{R}^n$ とした多次元の場合に、ヘルダーの不等式という一つの視点から光が当てられる。そして、もう一つの御利益は式 (16) に現れる $\langle h(x)F(x) \rangle_x = \sigma^2$ という一見、不思議な制約条件の「必然性」が、ヘルダーの不等式を経由して式 (17) の極値問題の解を「構成」する際に、クリアとなることである。しかし、その「物理的解釈・意味」は Tsallis 自身の言葉によっても「However, a clear-cut physical interpretation in terms of the dynamics and occupancy geometry within the full phase-space Γ is still lacking.」とあり⁽²²⁾、依然謎のままである。

さて、結局式 (12) の \bar{Z} と最適入力 ($= f_{\text{opt}, p}$) が、それぞれ式 (16) の $h(x) = x^2$ と最適なエスコート関数 $F_{\text{opt}, q}$ に対応することが分かる。それらの形状を図示したものが、それぞれ図 3 の (b), (c) であり、両者間の類似性を見ることができる。要するに、注入同期の最適化と Tsallis エントロピーの最大化とは、いずれも p 乗ノルムの制約下での内積の最大化が本質と分かる。

蛇足かもしれないが以下のことを述べておきたい。Tsallis の式 (16) による極値問題の枠組みで $\langle x^2 F(x) \rangle_x = \sigma^2$ のエスコート関数への制約を、むしろ通常の $\langle x^2 f(x) \rangle_x = \sigma^2$ 、つまり f の分散 = 一定の制約にしてみるとどうなるだろうか？ 実はこの問題は今を遡る約 60 年前に森口繁一先生が変分法と巧妙な不等式評価を組み合わせた方法により解答を得られている⁽²⁹⁾。更に森口先生は、コーシー・シュワルツの不等式 (ヘルダーの不等式 (13) で $p = q = 2$ のケースに相当) から統計数理の極値問題を解決されている⁽³⁰⁾! しかし、恐らくは、ヘルダーの不等式に踏み込むまでには致らなかったのではなからうか... というのも、分散 $\langle x^2 f(x) \rangle_x$ を有限とする前提では、一般のべき分布は現れず、エスコート関数 $F(x)$ 、ひいてはヘルダーの不等式の出る幕は少ないからである^(注13)。

(注10): $h(x) = x$ としても 3.1 と同様のことが実行可能である⁽²⁶⁾

(注11): 更に「極大」となることまでの議論はなく、文献 (23) にあるように、 $q < 0$ での「極小」となる解との混同も生じている。

(注12): この場合、ヘルダーの不等式の逆である reverse Hölder's inequality⁽²⁸⁾を用いる。

(注13): とはいふものの、筆者らのヘルダーの不等式からの方法は森口先生の問題⁽²⁹⁾にも適用可能である。

3.2 一般化フィッシャー情報 (q -Fisher information) とヘルダーの不等式

筆者が上記の先行研究⁽²⁶⁾の存在を知ったのは実はごく最近であり、3.1 で述べた Tsallis エントロピーの最大化においてヘルダーの不等式が本質的であることを示す文献⁽²⁷⁾が受理された後である。ところが、この文献⁽²⁶⁾の理論は Tsallis エントロピーの最大化のみならず、従来のフィッシャー情報の一般化である q -フィッシャー情報の最小化が、先の q -ガウス分布によって与えられる、という結果にまで到達していた！この q -フィッシャー情報 J_q は分布関数 f に対し、フィッシャー情報の対数ゆ度関数 $\ln f(x)$ を一般化して次のように与えられている⁽²⁶⁾ (31) (32)。

$$J_q[f] \equiv \langle F(x) \left\{ \frac{d}{dx} \ln_q f(x) \right\}^2 \rangle_x, \quad (20)$$

ただし、 F は f のエスコート関数、 \ln_q は式 (19) の q -指数関数に対応する q -対数関数である⁽²²⁾。また式 (20) は、 $q \rightarrow 1$ で通常のフィッシャー情報に漸近する。このフィッシャー情報はパラメータの不偏推定において、そのパラメータを含む分布関数 f が、そのパラメータについてどれほどの情報を持つかを示す量であり、具体的には f のパラメータについての対数ゆ度関数の微分 (すなわちスコア関数 $\frac{d}{dx} \ln f(x)$ 。ただし本稿の式 (20) では簡単のために分布のシフト量推定を仮定している。) の二次のモーメントとして与えられる。式 (20) の q -フィッシャー情報は、この「対数」尤度関数を「 q -対数」に一般化したものであり、これによりクラメール・ラオの不等式の一般化が可能となる。そのため従来のパラメータ推定の誤差の二次モーメントの下界についての性質が、一般の (二次以上の) モーメントへ拡張され、誤差の大きな部分を強調して評価することが可能となる御利益がある。

古市⁽²⁶⁾の理論は先駆的であり、文献⁽²⁶⁾の出版後、関連する多数の論文による引用が継続している。そのアプローチは、文献⁽²⁶⁾で Tsallis エントロピーの最大化を議論するのと同様であって、クラメール・ラオの不等式を一般化した不等式 (q -Cramér-Rao inequality) を用意した後に、 q -ガウス分布が確かに q -フィッシャー情報を最小化することを不等式から示すものである。

先の Tsallis エントロピーの最大化においてヘルダーの不等式が本質的であることを知った筆者は、当然、馬鹿の一つ覚えを發揮し、文献⁽²⁶⁾のエレガントではあるが構成的ではない証明を、ヘルダーの不等式一本から書き直す作業を開始した。約 1 週間計算に明け暮れた後、出張先で完成し、ヘルダーの不等式 (の等号成立条件) によれば、文献⁽²⁶⁾の結果よりも強い主張 (具体的には、 q -フィッシャー情報の最小化を与える必要「十分」条件) が可能になることが判明した。そして、ひそかに「これは、いい仕事になる！」とほくそ笑んだのであるが...

まあ、そんなおいしいことは続かないのであろうか、いざ論文にまとめようと文献⁽²⁶⁾を引用する文献を調べてみると、あ

るわあるわ... 文献⁽³¹⁾ (32)の成果を筆頭に、情報理論・信号処理分野の賢い方々 (実質、数学者) が、まさにこのヘルダーの不等式から q -フィッシャー情報の最小化 (並びに Rényi エントロピー最大化) について鋭い結果に到達していることを知ったのであった。この「土木作業」から筆者の得た経験は、「非線形問題の理論を作るとき、情報理論・信号処理分野の先行研究も見落とすな」というところだろうか...

4. 最適制御の問題との関連

現代制御理論、特にポントリャーギンの最大値原理⁽³³⁾は高度に磨き上げられた理論で面白そうではあるものの、実際のところ今の非線形な問題でどれほど役に立つものかと、筆者はどちらかという懐疑的であった。ところが、最近の米国の近しい研究者の仕事 (例えば文献⁽³⁴⁾ (35)) を見ると、この理論も使いようによっては重要な応用に有用な知見を与えてくれるものであると思うようになった。例えば、文献⁽³⁴⁾は医療の現場で必須の MRI で用いる核磁気共鳴のパルス入力制御を最適化することに成功し、文献⁽³⁵⁾はパーキンソン病やてんかんの発作をソフトに緩和させるパルス注入制御⁽³⁶⁾の基礎開拓を目的とし、現代制御理論をうまく援用している。ここでは文献⁽³⁵⁾の問題に注目し、ここでもヘルダーの不等式が本質的となり、ポントリャーギンの最大値原理の枠組みを越えたところに踏み込むことが可能であることを示そう。

Dasanayake ら⁽³⁵⁾の目的とするのは、周期的に発火 (振動) する様々なペースメーカーニューロンの集団に対して、どのような制御 (外部入力) がその発火の頻度を最も高く、あるいは低くするかを明らかにすることである。文献⁽³⁵⁾ではニューロン間の相互作用が十分小さく無視できるとして、振幅を M に制限した入力電流 f により個々のペースメーカーニューロンの周期的発火の時間間隔 T を最小化あるいは最大化する次の問題 CT1 に帰着している。

最適時間制御問題 CT1 :

$$\text{minimize } T, \quad (\text{あるいは maximize } T),$$

$$\text{subject to } \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{T}{2\pi} \omega + \frac{T}{2\pi} Z(\theta) f(\tau), \quad (21a)$$

$$|f(\tau)| \leq M, \quad \forall \tau \in [0, 2\pi], \quad (21b)$$

$$\theta(\tau = 0) = 0, \quad \theta(\tau = 2\pi) = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau = 0, \quad (21c)$$

ただし、以下の取り扱いの便利さから、元の時間 t から $\tau \equiv \frac{2\pi t}{T}$ により T でスケールした時間 τ を導入している。ここで θ, ω はそれぞれニューロンの発振位相、自然周波数を示し、簡単のため $\theta = 0 (= 2\pi)$ で発火するものとする。また、入力 $f(\tau)$ はあくまでも $\tau \in [0, 2\pi]$ で定義され、それ以外の時間では $f(\tau) = 0$ となる。つまり、2.1 の式 (3), (4) とは異なり入力 f の周期性は不必要となる。この問題 CT1 は、ハミルトニアン $H = \lambda_0 + \lambda_1[\omega + Z(\theta)f] + \lambda_2 f$ (ただし、 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ はラグランジュの未定乗数) を導入することにより、ポントリャーギンの最大値原理の枠組みに入る。その結果、最適制御 f は、 M と $-M$ の 2 値をとる、いわゆるバングバング (bang-bang) 制

御となることが導かれる（場合によっては，入力が3値となるバング-特異-バング制御 (bang-singular-bang) にもなる³⁵⁾。

ところが，式 (21a) を式 (21c) の境界条件の下で， τ について積分すると，この問題 CT1 は次の問題 CT2 に等価であることが分かる。

$$\begin{aligned} \text{CT2: } & \underset{f(\tau)}{\text{maximize}} \int_0^{2\pi} [Z(\theta(\tau)) + \lambda] f(\tau) d\tau, \\ (\text{あるいは } & \underset{f(\tau)}{\text{minimize}} \int_0^{2\pi} [Z(\theta(\tau)) + \lambda] f(\tau) d\tau, \quad (22a) \\ \text{subject to } & |f(\tau)| \leq M, \forall \tau \in [0, 2\pi], \quad (22b) \end{aligned}$$

ただし，ここでラグランジュの未定乗数 λ を導入して式 (21c) のチャージバランス制約 $\langle f(\tau) \rangle = 0$ を組み込んでいる。CT1 と CT2 が等価であることは，式 (21a) を式 (21c) の下で積分して得られる関係式 $\int_0^{2\pi} [Z(\theta(\tau)) + \lambda] f(\tau) d\tau = 2\pi \left(\frac{2\pi}{T} - \omega \right)$ より， T の最小化 (最大化) がそれぞれ $\langle [Z(\theta) + \lambda] f \rangle$ の最大化 (最小化) に対応することから従う。

ここまで来れば，この最適化問題 CT2 において，式 (22a) の f と $Z(\theta) + \lambda$ をそれぞれヘルダーの不等式 (13) の f と g とみなすことが自然であることが分かる。その際に，式 (22b) の制約条件 $|f(\tau)| \leq M$ は $\|f\|_\infty = M$ と書き直され，より一般に

$$\|f\|_p = M \quad (1 \leq p \leq \infty) \quad (22c)$$

による入力 f の制約条件が自然に見えてくる。このように，問題 CT2 をヘルダーの不等式の等号成立条件の問題であることを見抜けば，以下のようにポントリャーギンの最大値原理の枠組みを越えたところに容易に踏み込むことが可能となる。結果として得られるのは，必要「十分」条件としての (本物のお墨付きの) 最適解である。その詳細は次のとおりである。

[$p = \infty$ の場合; バングバング制御] CT2 の最適解 $f_{\min}(\tau)$ (あるいは $f_{\max}(\tau)$) は，2.3 の議論¹⁹⁾を繰り返す，おおよそ次のように得られる。

$$\begin{aligned} f_{\min}(\tau) &= M \operatorname{sgn}[Z(\theta(\tau)) + \lambda], \\ f_{\max}(\tau) &= -M \operatorname{sgn}[Z(\theta(\tau)) + \lambda], \quad (23) \end{aligned}$$

ただし， λ は文献 (35) に現れるパラメータ α に相当し， $\lambda = -\alpha$ が成り立つ。この λ は， $Z(\theta_i) + \lambda = 0$ を満たす，入力 $= M$ と $-M$ の切替点 θ_i とともに有限次元の方程式から求まる⁽³⁵⁾。

[$1 < p < \infty$ の場合; 一般化パワー制約] 2.3 の議論¹⁹⁾を繰り返すことで，通常のパワー制約 ($p = 2$) も含め，次のように最適制御が得られる。

$$\begin{aligned} f_{\min}(\tau) &= M \operatorname{sgn}[G(\tau)] \left(\frac{|G(\tau)|}{\|G(\tau)\|_q} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \\ f_{\max}(\tau) &= -M \operatorname{sgn}[G(\tau)] \left(\frac{|G(\tau)|}{\|G(\tau)\|_q} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad (24) \end{aligned}$$

ただし， $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ， $G(\tau) = Z(\theta(\tau)) + \lambda$ である。 f_{\min} ， f_{\max} を $f_{\text{opt},p}$ とまとめて書くと，それぞれの未定乗

数 λ は次のチャージバランス制約から得られる:

$$\int_0^{2\pi} f_{\text{opt},p}(\tau) d\tau = 0,$$

すなわち，

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{T} f_{\text{opt},p}(\theta) \left[\omega + Z(\theta) f_{\text{opt},p}(\theta) \right]^{-1} d\theta = 0. \quad (25)$$

[$p = 1$ の場合; パルス入力] これも 2.3 の議論の繰り返しであり， L_1 空間中での最適化問題として，最適パルス入力を得ることが可能になる。この最適パルス入力は実用上重要であり，例えば Danzl ら⁽³⁷⁾のような先行研究が存在しているが，パルス入力の最適化のためのきちんとした枠組みは筆者の知る限り存在しなかったようである。

上記の式 (23)，(24) において f_{\min} と f_{\max} の表式は - の符合を除き互いに一致しているが，それぞれの λ (更に θ_i) は一般に互いに異なる。したがって f_{\min} と f_{\max} の形状も一般に互いに異なるものになる。

以上の結果の意味することは何であろうか？ それは，ヘルダーの不等式の存在に気が付けば，CT1 や CT2 の特定の問題においては，ポントリャーギンの最大値原理という伝家の宝刀を持ち出さずとも，より深いところまで踏み込むことができることである。つまり，ポントリャーギンの最大値原理においては，あくまでも (変分法ベースであり) 最適解の必要条件としてその候補が得られるのみであり，かつ，その制約条件は式 (22b) の振幅制約に限られるからである (そのために，ポントリャーギンの最大値原理の枠組みで従来知られている必要十分条件として得られる最適解は，線形系などの自明なケースに限られている。)

要するに，汎用性を重視した一般論 (この場合，ポントリャーギンの最大値原理) の足元には，問題 CT1，CT2 や第 2 章での注入同期のように「豊かな各論」が潜んでいるようである。では，この「各論」が本家のポントリャーギンの最大値原理や関連する現代制御理論のどれほどの部分を占めているのか？ このことについては稿を改めて議論したい。

5. 今後の課題・展望

広く知られているヘルダーの不等式が本質となる物理，工学等の具体的問題が，これまで余り知られていなかったのは驚きでさえある。ヘルダーの不等式の 100 年を超える歴史と，数学では日常的に使用されているにもかかわらず，である。

本稿の 2. の注入同期に関する課題としては，まず文献 (2) (9) (10) (14) (15) のような回路設計への応用が挙げられる。例えば，2.1 の位相縮約の枠組みは，既にパワーエレクトロニクス分野で有用な E 級発振器の実験系で有効であることが実証され⁽¹⁵⁾，現在は 2.3 の結果により，実験系でその最適化を実証する段階に至っている。

一方，4. に関連して，制御理論の最近の研究ではエネルギー (パワー収支) 制約下での最適制御が注目されているが，筆者らの一般化パワー (p 乗ノルム) 制約下での取組みは，そのよう

な研究に貢献をすることも期待される。更に制御理論の新規な方向性として、例えば振動子集団の「アンサンブル制御」(例えば Li ら⁽³⁴⁾)が開拓されているが、そこで必要となるパルス列の入力による制御則の最適化のために、最適入力を L_1 空間での極値問題として求める可能性がある。その文脈で筆者らの枠組み(2.3のS2)は有用となると期待される。

また、本稿の最適化理論は、振動現象が式(3)や式(4)に帰着されれば、そのまま適用可能である。このことは最近の非線形物理における位相縮約の適用範囲の拡大が、時間遅れ系、局在パルスの運動、更に流体系の時空間パターンにまで及んでいる現状(例えば河村ら⁽³⁸⁾)、SF級の夢や希望をもたらしてくれるように思われる。例えば、一つの「心臓」を対象に、その病理の本質的理解や新規なペースメーカーの「最適設計・制御」のようなものが可能になるのではないかと。もちろん、そこに至るには本稿の冒頭で述べた紙と鉛筆に加え、地球シミュレータ級のスパコンも必要となるだろう⁽³⁹⁾。

本稿では、あくまでもヘルダーの不等式のみに絞って話題を提供した。もし、他の不等式まで議論すれば、筆者の力量を越え、また規定のページ数をはるかに越えるだろう。しかし、言うまでもなく他の不等式も重要、有用である。装備(高度な数学)を必要とする険しい岩峰(すなわち高度な理論。例えば Lieb⁽⁴⁰⁾)を目指さずとも、日帰りの軽装で不等式の古典的教科書⁽²⁸⁾や最近の成果⁽⁴¹⁾を渉猟することは可能である。そのような「不等式の森^(注14)」を歩くとき、一瞬雑事を忘れ、非線形な世界の生き生きとした様子や豊かな芳香を感じるのには筆者だけではないだろう。今、解決を迫られている問題から、この不等式の森に、非線形な世界の一つの秩序を表わす新たな「木」が見つかることはあり得る話である。事実、ヘルダーの不等式とヤングの不等式を内包する Brascamp-Lieb の不等式⁽⁴⁰⁾という巨木が見いだされたのは、僅か40年ほど前のことである...

本稿では最近筆者の出会ったささやかな発見を鮮度良く皆様にお届けすることを目的とした。そのため詳細やその後の展開については割愛せざるを得なかった。これらについては末尾の文献、筆者の研究室のサイト⁽⁴²⁾を参照されたい。

謝辞 本研究は、科研費基盤B研究の下に徳田功先生(立命館大)、福田弘和先生(阪府大)、関屋大雄先生(千葉大)との共同研究の一環として行われた。河村ら⁽³⁸⁾などの流体系における時空間パターンの最近の成果について、中尾裕也先生(東工大)、また Lieb の論文集⁽⁴⁰⁾などの不等式に関する成果について大平徹先生(名大)に御教示頂きました。また、日頃議論頂く、唐沢好男先生(電通大)、本城和彦先生(電通大)、水柿義直先生(電通大)、西川功先生(電通大)並びに研究室の各位に感謝致します。最後に荒巻義雄先生の御厚誼に感謝致します。本研究の一部はテレコム先端技術研究支援センター SCAT 研究費助成を受けて行われた。

(注14): Gardner⁽⁴¹⁾によると、planet of inequality.

- (1) 荒巻義雄, “術の小説論,” SF マガジン, 5月号, pp. 94–112, 1970.
- (2) K. Kawasaki, Y. Akiyama, K. Komori, M. Uno, H. Takeuchi, T. Itagaki, Y. Hino, Y. Kawasaki, K. Ito, and A. Hajimiri, “A millimeter-wave intra-connect solution,” IEEE ISSCC Digest of Technical Paper, 414–415, 2010.
- (3) 上田皖亮, “周波数引込・抑制現象のはざ間に現れた謎の正体 NLP報告書の数値が全てを語っている,” IEICE Fundamentals Review, vol.7, no.3, pp.172–185, 2014.
- (4) 蔵本由紀, “いわゆる「蔵本モデル」について,” 応用数理, vol.17, no.2, pp.175–177, 2007.
- (5) Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves and Turbulence, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- (6) R. Adler, “A study of locking phenomena in oscillators,” Proc. IRE, vol.34, no.6, pp.351–357, 1946.
- (7) K. Kurokawa, “Injection locking of microwave solid-state oscillators,” Proc. IEEE, vol.61, no.10, pp.1386–1410, 1973.
- (8) K. Daikoku and Y. Mizushima, “Properties of injection locking in the non-linear oscillator,” Int. J. Electron., vol.31, no.3, pp.279–292, 1971.
- (9) K. Yamamoto and M. Fujishima, “A 44- μ W 4.3-GHz injection-locked frequency divider with 2.3-GHz locking range,” IEEE J. Solid-State Circuits, vol.40, no.3, pp.671–677, 2005.
- (10) M. K. Kazimierczuk, V. G. Krizhanovski, J. V. Rasokhina, and D. V. Chernov, “Injection-locked class-E oscillator,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.53, no.6, pp.1214–1222, 2006.
- (11) F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich, Weakly Connected Neural Networks, Springer, New York, 1997.
- (12) A. Hajimiri and T. H. Lee, “A general theory of phase noise in electrical oscillators,” IEEE J. Solid-State Circuits, vol.33, no.2, pp.179–194, 1998.
- (13) P. Bhansali and J. Roychowdhury, “Gen-Adler: the generalized Adler’s equation for injection locking analysis in oscillators,” Proc. IEEE Asia and South Pacific Design Automation Conference, pp.522–527, 2009.
- (14) H.-A. Tanaka, A. Hasegawa, H. Mizuno, and T. Endo, “Synchronizability of distributed clock oscillators,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.49, no.9, pp.1271–1278, 2002.
- (15) T. Nagashima, X. Wei, H.-A. Tanaka, and H. Sekiya, “Numerical derivations of locking ranges for injection-locked class-E oscillator,” Proc. IEEE 10th International Conference on Power Electronics and Drive Systems, pp.1021–1024, 2013.
- (16) 太田大輔, 田中久陽, 毎野裕亮, “同期現象の解析に必要な位相方程式の導出アルゴリズムに関する比較検討,” 信学論 (A), vol.J89-A, no.3, pp.190–198, 2006.
- (17) T. Harada, H.-A. Tanaka, M. J. Hankins, and I. Z. Kiss, “Optimal waveform for the entrainment of a weakly forced oscillator,” Phys. Rev. Lett., vol.105, no.8, 088301, 2010.
- (18) A. Zlotnik, Y. Chen, I. Z. Kiss, H.-A. Tanaka, and J. S. Li, “Optimal waveform for fast entrainment of weakly forced nonlinear oscillators,” Phys. Rev. Lett., vol.111, no.2, 024102, 2013.
- (19) H.-A. Tanaka, “Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators,” Physica D, vol.288, pp.1–22, 2014.
- (20) W. Rudin, Real and Complex Analysis, third ed., pp.63–65, McGraw-Hill, New York, 1987.
- (21) H.-A. Tanaka, “Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators,” J. Phys. A, Math. Gen., vol.47, no.40, 402002, 2014.
- (22) C. Tsallis, Introduction to Nonextensive Statistical Me-

chanics, Springer, New York, 2009.

- (23) C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics," *J. Stat. Phys.*, vol.52, pp.479–487, 1988.
- (24) 須論弘樹, 複雑系のための基礎数理 ベキ乗則とツァリスエントロピーの数理, 牧野書店, 東京, 2011.
- (25) S. Sharma, "Queue length distribution of network packet traffic: Tsallis entropy maximization with fractional moments," *IEEE Commun. Lett.*, vol.10, no.1, pp.34–36, 2006.
- (26) S. Furuichi, "On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics," *J. Math. Phys.*, vol.50, 013303, 2009.
- (27) H.-A. Tanaka, I. Nishikawa, J. Kurths, Y. Chen, and I. Z. Kiss, "Optimal synchronization of oscillatory chemical reactions with complex pulse, square, and smooth waveforms signals maximizes Tsallis entropy," *Europhys. Lett.*, vol.111, no.5, 50007, 2015.
- (28) G. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Second Edition, Cambridge Mathematical Library, 1988.
- (29) S. Moriguti, "A lower bound for a probability moment of any absolutely continuous distribution with finite variance," *Ann. Math. Stat.* vol.23, no.2, pp.286–289, 1952.
- (30) 森口繁一, 奥野忠一, 末包良太, 伊理正夫, 竹内 啓, 生きている数学: 数理工学の発展, 培風館, 東京, 1979.
- (31) J.-F. Bercher, "On generalized Cramér-Rao inequalities, generalized Fisher information and characterizations of generalized q -Gaussian distributions," *J. Phys. A, Math. Gen.*, vol.45, no.25, 255303, 2012.
- (32) E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, "Cramér-Rao and moment-entropy inequalities for Rényi entropy and generalized Fisher information," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.51, no.2, pp.473–478, 2005.
- (33) L. S. ポントリャーギン, 最適制御理論における最大値原理 (ポントリャーギン数学入門双書), 森北出版, 東京, 2009.
- (34) J.-S. Li, J. Ruths, T.-Y. Yu, H. Arthanari, and G. Wagner, "Optimal pulse design in quantum control: A unified computational method," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol.108, no.5, pp.1879–1884, 2011.
- (35) I. S. Dasanayake and J.-S. Li, "Design of charge-balanced time-optimal stimuli for spiking neuron oscillators," *Neural Comput.*, vol.26, no.10, pp.2223–2246, 2014.
- (36) P. A. Tass, L. Qin, C. Hauptmann, S. Dovero, E. Bezdard, T. Boraud, and W. G. Meissner, "Coordinated reset has sustained aftereffects in Parkinsonian monkeys," *Ann. Neurol.*, vol.72, no.5, pp.816–820, 2012.
- (37) P. Danzl, A. Nabi, and J. Moehlis, "Charge-balanced spike timing control for phase models of spiking models," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol.28, no.4, pp.1413–1435, 2010.
- (38) Y. Kawamura and N. Hiroya, "Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode," *Physica D*, vol.295–296, pp.11–29, 2015.
- (39) 岡田純一, "心電図の数理," *応用数理*, vol.22, no.4, pp.238–246, 2012.
- (40) E. H. Lieb, *Inequalities: Selecta of Elliott H. Lieb.*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- (41) R. J. Gardner, "The Brunn-Minkowski inequality," *B. Am. Math. Soc.*, vol.39, no.3, pp.355–405, 2002.
- (42) <http://synchro4.ee.uec.ac.jp/>
- (43) 田中久陽, "注入同期の物理限界," *応用数理*, vol.24, no.3, pp.7–13, 2014.

(NLP 研究会提案, 平成 27 年 10 月 31 日受付)



田中久陽 (正員: シニア会員)

1990 早大・電気卒. 1992 同大学院理工学研究科修士課程了. 1995 同大学院理工学研究科博士後期課程了. 博士 (工学). 同年から, 日本学術振興会特別研究員 (PD). 1996 カリフォルニア大バークレー校客員研究員. 1997 ソニーコンピュータサイエンス研究所研究員. 2001 電通大学院電気通信学研究科助教授 (現在, 情報理工学研究科准教授), 現在に至る. 情報通信システム, 非線形物理等の分野横断的領域の研究に従事. 本会通信ソサイエティのアドホックネットワーク研究専門委員会幹事, 基礎・境界ソサイエティ庶務幹事, 複雑コミュニケーションサイエンス研究専門委員会発起人, 同副委員長などを務める. 2015 本会 NOLTAソサイエティ功労賞, 2006, 2007, 2009 第 22 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム技術賞), 第 23 回, 第 25 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム奨励賞) 各受賞. 著書に「非線形ダイナミクスとカオス 数学の基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで」(中尾裕也, 千葉逸人と共訳, 2015) 等がある.