

非線形問題とヘルダーの不等式（続編）

A Sequel to 'Nonlinear Problems and Hölder's Inequality'

田中久陽 Hisa-Aki TANAKA

アブストラクト ヘルダーの不等式は、1888年数学者のロジャーズと1889年ヘルダーにより独立にその基礎が見いだされ、以降、関数解析等の解析学の基本的不等式として日常的に多用されている。しかし意外なことに、この不等式の物理的解釈の例は最近まで知られていなかったようである。本稿は、2016年1月の解説論文「非線形問題とヘルダーの不等式」の続編として、この不等式が最近の非線形問題にエレガントな解答と刺激を与えている様子を報告する。

キーワード ヘルダーの不等式、不等式の物理的解釈、非線形問題、一般化エントロピー、注入同期

Abstract Since the basis of Hölder's inequality was found by mathematicians, *i.e.*, independently by Rogers in 1888 and Hölder in 1889, the inequality has been frequently utilized as a basic inequality in mathematical analysis such as functional analysis. However, surprisingly, no physical interpretation of the inequality seems to be known until 2014. In this article, as a sequel to "Nonlinear Problems and Hölder's Inequality" (Jan. 2016), I show that the inequality leads to an elegant solution to recent nonlinear problems and also inspires them.

Key words Hölder's inequality, physical interpretation of the inequality, nonlinear problem, generalized entropy, injection locking

1. はじめに

「数学者がエレガンスと呼ぶものは、命題の真であることを証明するのに欠くべからざる原理だけを用いることの結果として、出てくるのである。」

バートランド・ラッセル著作集4 — 神秘主義と論理
(江森巴之助訳) から

2016年1月の解説論文「非線形問題とヘルダーの不等式」⁽¹⁾が一部の方々に好評を頂き、その続編を書かせて頂く依頼を受けました。自分の浅学を日増しに痛感する日々ですが、筆者の経験は地図のない新領域をなだて切り開こうとする皆様に、もしかすると御参考（あるいは反面教師...）になるのではと考へ、恥も外聞もなくお引き受けしました。前回の解説論文から2、3年の間に進んだ話題ですので、現在進行中の内容となりますことをお許し頂けますと幸いです。

さて、早速ですが、筆者の遭難の報告から始めます。時は2012年6月、場所は屋久島、筆者は考え事をしながら独り山歩きをしていました。その考え事とは、Jürgen Kurths先生（フンボルト大学）が2012年5月に来日された際に指摘して下さった

アイデアの検討です。このときまでに筆者は、文献(1)に記載の「注入同期最適化問題」の解決の見通しを得ており、その結果をKurths先生にお見せしたところ、意外なアイデアを頂いたのです。それは、「あなたの方法（すなわちヘルダーの不等式で非線形最適化問題を解く方法）は、Tsallis（ツァリス）エントロピーやRényiエントロピーの最大化問題に役立つかもしれない」というものです。このアイデアは興味深く、もしかするとTsallisエントロピーを含む一般化エントロピー最大化の分野に新しい視点を提供することになるかもしれない！と期待させるものでした。

屋久島へのフライトの途中で問題を考え始め、既に頭に数式がダウンロードされている状態で翌日山に行ったわけですが... 目指すはH岳とI山方面、屋久島の中でも最も神秘的な場所の一つでしょう。地図とコンパスと軽装備で出発しました。途中までは勝手知ったる道で、黙々と歩きながら先の考え事を巡らせているうちに、問題のアイデアがどうやら行けそうだとの直観に至りました。その喜びの勢いもあり、H岳山頂に向け、とにかく高い方へと藪漕ぎ^(注1)し、尾根の岩を飛び渡り、意外に早く山頂に到着することができました。ところが山頂で弁当を食べながら、うっすらと胸騒ぎがしてきました。「問題が解けそうで、登頂も完了だけど、来た道を引き返せるのかな？」と。案の定、下山の途中で来た道を見失い、ルートを探すうちにH岳の白い岩峰の周りを堂々巡りし、気が付くと午後4時近くになっていました。藪のため見通しが利かず足場も悪く地図とコンパスが役に立たない状況でした。またビバークするにも水場がな

田中久陽 正員：シニア会員 電気通信大学大学院情報理工学研究所

E-mail htanaka@uec.ac.jp

Hisa-Aki TANAKA, Senior Member (Graduate School of Informatics and Engineering, University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182-8585 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ

Fundamentals Review Vol.12 No.4 pp.238-247 2019年4月

©電子情報通信学会 2019

(注1)：笹や低木の密生する藪をかき分けて進むこと。

く、沢へ降りるのはほぼ不可能と思われる危険な状況でした。こうして4時間近いルート探索から疲弊し、パニック寸前となりました。

ところが一瞬冷静に戻り、近くの尾根に上がり携帯の電波が届くかチェックしてみようかと…。当時、この辺りは登山口からの電波が届かなかったのですが、尾根ならばひょっとすると？と気が付いたのです。幸い電波を通じ、まず電話したのは、持っていた地図⁽²⁾の作者でいらっしゃる太田五雄先生（当時、屋久島在住）でした。以下は太田先生と筆者のやりとりのあらましです。

筆者：太田さん、いつもお世話になっている田中ですが、山中でルートを外れ困っています。幸い太田さんの地図は持参してまして、どうやらH岳の岩峰の周りに居るようなのですが…T岳がそう遠くないところに見えているようです…。

太田さん：ならば、T岳目指してまっすぐ敷を漕げば、T岳周辺の踏み跡を見つけてルートに戻れますよ！

その後の展開は読者の皆様の御想像のとおり、幸い電話の通じた地元のレスキュー隊の救助により日没後2時間ほどで登山口まで無事帰還と相成りました。その翌日、筆者は菓子折りを持って太田さんのお宅にお伺いしました。日の高いうちから焼酎を飲まれていた太田さんの「一杯やらないか」のお誘いを丁寧に辞退し、お礼の言葉を述べました。

筆者：「太田さんのおかげで正気を取り戻し、何とかその日のうちに下山できました。全く太田さんのおかげです。」

太田さん：「あのときは、そう言うしかなかったけど、仮に沢に降りたとしても、最終的には安房に降り着いていたはずですよ。田中さんは、屋久島に通う回数を減らして、その浮いたお金でGPSを買いましょ。田中さんには必要ですよ…。」

以上の遭難話は実は続きがあります。図らずも、その2年後、ほぼ同様の遭難状態に陥ることになりました。今度は山中でなく、大学の研究室で。そして、更にその後、論文投稿してからも…。

2. 一般化エントロピーとヘルダーの不等式

以下では、まず、本稿に必要な唯一の予備知識として、ヘルダーの不等式と Tsallis エントロピーなどの一般化エントロピー最大化問題について説明します(2.1と2.2)。その上で、冒頭の出を歩きながら考えたアイデアについて述べ、簡単な例(以下の定理1)でその実行例を説明します(2.3)。ところが、もう一つの例(定理2)でも同じようにいけるかと思いきや、1.で予告したように遭難してしまいます。幸い、1952年の森口先生の結果⁽³⁾をヒントに、この遭難から生還し、筆者のアイデアは意外に多くの問題に役に立つという展望を得ます(2.4)。その後、論文投稿、しかし…という一連の流れと、今後への希望についても蛇足ながら紹介します(2.5)^(注2)。

(注2)：以下の2.の内容は、文献(1)の3.で、ごくあっさりとして紹介した内容を大幅に追加し、充実したものです。

2.1 ヘルダーの不等式

よく知られているヘルダーの不等式は、二つの関数 f, g とパラメータ α, β に対して、次の形で与えられます。

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta, \quad (1)$$

ただし、この α, β は $1 \leq \alpha, \beta \leq \infty$, $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ を満たします^(注3)。また、ここで $\|fg\|_1 = \int_S |fg| d\mu$, $\|f\|_\alpha = \left(\int_S |f|^\alpha d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\|g\|_\beta = \left(\int_S |g|^\beta d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}}$ です。本稿では後の便利のため、この α, β の代わりに一つのパラメータ q を導入して $\alpha = \frac{1}{q}, \beta = \frac{1}{1-q}$ と書くことにします。したがって、次が成立します；

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{\frac{1}{q}} \|g\|_{\frac{1}{1-q}} \quad (\text{ただし}, 0 \leq q \leq 1). \quad (2)$$

このヘルダーの不等式(2)の成り立つ関数 f, g は、 \mathbb{R}^n 内の可測集合上で定義され、 $\|f\|_{\frac{1}{q}} < \infty$, $\|g\|_{\frac{1}{1-q}} < \infty$ を満たす広いクラスに属します⁽⁵⁾。したがって、工学で有用なパルス関数、すなわちコンパクトな台上でのみ非0な値を取り、他の点では値が0となるような不連続関数も自然にその対象となります。

ヘルダーの不等式の有用である点は、式(2)の等号が成立する条件を与えることができることです。例えば $0 < q < 1$ の場合、等号成立すなわち $\|fg\|_1 = \|f\|_{\frac{1}{q}} \|g\|_{\frac{1}{1-q}}$ が成立するための必要十分条件は、両方同時に0にならない定数 A, B が存在して、

$$A |f(s)|^{\frac{1}{q}} = B |g(s)|^{\frac{1}{1-q}} \quad (3)$$

が S 内のほとんど全ての s について成り立つことです。また、 $q = 0$ や $q = 1$ の場合には式(3)の等号成立条件は成り立ちませんが、これとは別の等号成立条件を与えることができます^(注4)。

一方、式(2)から直接に、次の逆不等式すなわち逆ヘルダーの不等式(reverse Hölder's inequality)も得られます⁽⁴⁾。

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_{\frac{1}{q}} \|g\|_{\frac{1}{q-1}} \quad (\text{ただし}, q > 1). \quad (4)$$

ここで $\|f\|_{\frac{1}{q}} = \left(\int_S |f|^{\frac{1}{q}} d\mu\right)^q$, $\|g\|_{\frac{1}{q-1}} = \left(\int_S |g|^{\frac{1}{q-1}} d\mu\right)^{1-q}$ ^(注5) ですが、これらは $q > 1$ ではもはやノルムになりません。しかし以降ではノルムの性質を使いませんので、簡単のためこの表記法を用います。この式(4)の成り立つ関数 f, g は式(2)のヘルダーの不等式と同様の広いクラスに属します。ただし、式(4)内で $\frac{1}{q-1} < 0$ ですので、 g については S 内のほとんど全ての s において $g(s) \neq 0$ という条件を課します^(注6)。以上を念頭に、逆ヘルダーの不等式の等号成立条件は式(3)よりも簡潔に、次の必要十分条件として与えられます。すなわち、定数 $A (\geq 0)$ が存在して

(注3)：例えば、文献(4)、(5)はそれぞれ、 f, g が1変数関数更に一般の可測関数の場合にその証明を与えています。

(注4)：例えば、文献(6)のp.5, Lemma 4.

(注5)：ただし、 S は可測空間、 μ は測度を示す。

(注6)：文献(4)のp.140.

$$|f(s)| = A |g(s)|^{\frac{-q}{q-1}}, \quad (5)$$

が S 内のほとんど全ての s において成り立つことです。2.3 以降では、式 (3), (5) の等号成立条件が「藪漕ぎ」のツールとして繰り返し現れます。

2.2 一般化エントロピーの最大化問題

次に、Tsallis エントロピーという山に連なる一般化エントロピーという連峰についてミナマな説明をします。実は、筆者の発見は一般化エントロピーに関する問題群に有効であることが分かってきたからです。

まず、少々天下り的ですが Tsallis エントロピー⁽⁷⁾ の定義をします。連続版の Tsallis エントロピーは、ある物理量 x の確率密度分布 $p(x)$ と $q \geq 0, q \neq 1$ のパラメータ q に対し、次で定義される量 (汎関数) により与えられます^(注7)。

$$S_q[p] = \frac{1 - \langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}}{q-1}, \quad (6)$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ は $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dx$ を示します。Tsallis エントロピー最大化の問題とは、 p の規格化条件 $\langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 1$ と、以下に示す p に対するもう一つの制約下で、式 (6) を最大にする $p_{\text{opt}, q}$ を求めるものです。具体的には、次で与えられます。

$$\begin{aligned} & \underset{p(x) \in \mathcal{D}}{\text{maximize}} S_q[p] & (7) \\ & \text{subject to } \langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 1, \quad \frac{\langle h(x)p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}}{\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}} = \sigma^2, \end{aligned}$$

ただし、 \mathcal{D} は確率密度分布の全体、 h をひとまず $h(x) = x^2$ とします。

以上の最大化問題 (7) は、未定乗数 λ_q を導入し、制約条件：

$$\frac{\langle h(x)p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}}{\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}} = \sigma^2, \text{ 即ち } \langle (h(x) - \sigma^2)p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0, \quad (8)$$

を式 (6) に組み込むことにより、次の最大化問題へ等価に変形されます。(詳細は文献 (1), (8))

$$\begin{aligned} & \underset{p(x) \in \mathcal{D}}{\text{maximize}} \\ & T_q[p, \lambda_q] \equiv \sigma^2 \langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} + \lambda_q \langle (x^2 - \sigma^2)p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} & (9) \\ & = \langle p^q(x) [\lambda_q x^2 + (1 - \lambda_q)\sigma^2] \rangle_{\mathbb{R}}, \\ & \text{subject to } \langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 1, \quad \text{ただし } 0 < q < 1. \end{aligned}$$

一方、 $q > 1$ の場合は最大化問題 (9) の maximize を minimize と置き換えた最小化問題となります。このように、問題 (7), (9) は本質的に、制約 (8) の下での $\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ の最大 (最小) 化と言えます。

最大化問題 (7), (9) の解となる $p_{\text{opt}, q}$ は $0 \leq q < 3, q \neq 1$ の q に対し唯一存在することが分かっています^{(7)・(9)}。また、Tsallis エントロピーが「一般化」エントロピーとみなせる一つの理由は、 $q \rightarrow 1$ の極限で式 (6) から従来のボルツマン-ギブス

(シャノン) エントロピー： $-\langle p(x) \log p(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ が得られるからです。比較的歴史の浅い Tsallis エントロピーがここまでメジャーになった理由として、 $1 < q < 3$ の q に対し、分布関数 $p_{\text{opt}, q}$ がその裾野において $\frac{2}{q-1}$ のべき指数を持つべき分布を与える性質があるでしょう。

次に Tsallis エントロピーに連なるもう一つの山として、Rényi エントロピーについて説明します。 q 次の Rényi エントロピー $H_q[p]$ は、 $0 < q < \infty, q \neq 1$ のパラメータに対し、

$$H_q[p] = \frac{1}{1-q} \log \langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} \quad (10)$$

で定義され、Tsallis エントロピーと同じく、 $q \rightarrow 1$ の極限でシャノンエントロピーとなります。また Rényi エントロピーの最大化は、式 (10) の \log が単調増加であるため、問題 (9) と同じく、本質的に $\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ の最大 (最小) 化です。

Rényi エントロピーが自然な一般化エントロピーであることを示す一例として、Campbell⁽¹⁰⁾ による (非線形な) 平均符号語長の結果が知られています。まず、シャノンの線形な平均符号語長： $L_0 = \sum_{i=1}^N p_i l_i$ に対して、パラメータ t を導入して非

線形な平均符号語長： $L(t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{i=1}^N p_i D^{t l_i}$ を導入します。

そうすると、この $L(t)$ の下限は自然に情報源の p についての $(1+t)^{-1}$ 次の (離散版) Rényi エントロピーとなるのです！ただし、以上の D はアルファベットの要素数、 p_i はシンボル x_i の生成確率、 l_i は符号語長を示します。このように、非線形な「尺度」の導入が一般化エントロピーの母体となっていますので、一般化エントロピーは (情報理論としてのみならず) 非線形問題としても興味深い対象となるわけです。以上の Tsallis エントロピー、Rényi エントロピーを取り巻く一般化エントロピーの最大化問題には、これまでに多様なヴァリエーションが知られています。これらについては、2.5 で改めて説明しますが、やはり本質的に $\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ の最大 (最小) 化です。

2.3 ヘルダーの不等式のみによる別証明

冒頭の出を歩きながら考えたアイデアは、以下に示す Tsallis エントロピー最大化問題の初等的な別証明として結実します。一つの驚きは、その証明に必要な装備が T シャツ、サンダル級の超軽装でよいことです。何と、未定乗数 λ_q を導入すると、ヘルダーの不等式のみで大域的最適解の構成と唯一性までを議論できてしまうのです。筆者の知る限り、この問題に関連する全ての先行研究 (例えば、文献 (9), (11)~(15)) は、これとは対照的に未定乗数を導入せず、それなりの装備を必要とします。つまり、二つの密度関数の間に、問題ごとに異なる形のダイバージェンスを巧みに導入して、その正值性により大域的最適解の唯一性を導く二段構えが必要です。更に、その大域的最適解はあらかじめ天下り的に与えられている必要もあります。要するに先行研究の証明では、GPS (あらかじめ与えられた大域的最適解) と 2 点間の縦走用の装備 (各種ダイバージェンス) が必要でした。一方、筆者の別証明ではヘルダーの不等式と少々の

(注7) : x が離散的な値を取る場合は文献(7)の説明が詳しい。

「藪漕ぎ」のみで十分です。これを以下の（文献(9)で既に得られている）例を基に説明します。

定理 1⁽⁹⁾ ($0 < q < 1$ の場合の Tsallis エントロピー最大化). $0 < q < 1$ に対し、以下の確率密度関数 $p_{\text{opt}}(x)$ は、Tsallis エントロピー最大化問題 (7), (9) の唯一の大域的最適解である。

$$p_{\text{opt}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{Z_q} \exp_q(-\beta_q x^2) & (x \in \bar{S}_{\text{opt}}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \bar{S}_{\text{opt}}), \end{cases}$$

ただし、 Z_q , β_q , \bar{S}_{opt} は以下のとおり：

$$Z_q = \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma B\left(\frac{1}{1-q} + 1, \frac{1}{2}\right), \quad \beta_q = \frac{1}{(3-q)\sigma^2},$$

$$\bar{S}_{\text{opt}} = \left[-\sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma, \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \sigma\right].$$

ここで $B(\cdot, \cdot)$ はよく知られているベータ関数、 \exp_q は q -指数関数と呼ばれ、

$$\exp_q x = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (11)$$

により定義されます。また、大域的最適解の $\frac{1}{Z_q} \exp_q(-\beta_q x^2)$ は q -ガウシアンと呼ばれています。（詳細は文献(7)の p.24) 以下では、予告した藪漕ぎを実行します。難しくありませんので、しばらくお付き合い頂けると幸いです。

筆者による別証明。 まず密度関数 $p(x) (\geq 0)$ と未定乗数 λ_q を最適化問題 (9) の実行可能解とする。その中で大域的最適解を p_{opt} , $\lambda_{q,\text{opt}}$ とするが、証明の終盤で、 p_{opt} , $\lambda_{q,\text{opt}}$ は (q , σ のみにより) 陽に得られ、特に $\lambda_{q,\text{opt}} = \frac{1}{2}(q-1) < 0$ と求まる。また、後の便利のため $p(x)$ が非 0 (正) となる x の集合を S_* (\mathbb{C} \mathbb{R}) とし、全ての $p(x)$ に対し、存在し得る S_* の集合を \mathfrak{S} と書くことにする。

まず、ヘルダーの不等式 (2) : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_{\frac{1}{q}} \|g\|_{\frac{1}{1-q}}$ を念頭に、問題 (9) において、 f と g を次により定義する：

$$f(x) = p^q(x), \quad (12a)$$

$$g(x) = \lambda_{q,\text{opt}} x^2 + (1 - \lambda_{q,\text{opt}}) \sigma^2, \quad (12b)$$

また閉区間 \bar{S}_{opt} を次により定義する：

$$\bar{S}_{\text{opt}} = \left[-\sqrt{\frac{\lambda_{q,\text{opt}} - 1}{\lambda_{q,\text{opt}}}} \sigma, \sqrt{\frac{\lambda_{q,\text{opt}} - 1}{\lambda_{q,\text{opt}}}} \sigma\right]. \quad (13)$$

これだけの用意で、山の頂上（大域的最適解）に至るルート（けもの道？）が、以下に示すとおり現れる。最大化したいのは $T_q[p, \lambda_q]$ なので、任意の実行可能解 p に対し、 $T_q[p, \lambda_q]$ を上からおさえるように不等式で評価していこう。

問題 (9) の $T_q[p, \lambda_q]$ において、 (p, λ_q) は任意の実行可能解であり、 $T_q[p, \lambda_q]$ 内の $\langle (x^2 - \sigma^2) f^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ から、 $T_q[p, \lambda_q]$ の値は λ_q と無関係である。そこで、この λ_q を（決め打ちで） $\lambda_{q,\text{opt}}$ に置き換え、以下の式 (14a) からスタートする：

$$T_q[p, \lambda_q] = T_q[p, \lambda_{q,\text{opt}}] = \langle fg \rangle_{\mathbb{R}} \quad (14a)$$

$$\leq \langle fg \rangle_{\bar{S}_{\text{opt}}} = \langle fg \rangle_{\bar{S}_{\text{opt}}} \quad (14b)$$

$$= \|fg\|_{1, \bar{S}_{\text{opt}}} \leq \|f\|_{\frac{1}{q}, \bar{S}_{\text{opt}}} \|g\|_{\frac{1}{1-q}, \bar{S}_{\text{opt}}} \quad (14c)$$

$$\leq \|g\|_{\frac{1}{1-q}, \bar{S}_{\text{opt}}} = \text{「山の頂上」}. \quad (14d)$$

最初の藪漕ぎとして、式 (14b) で \bar{S}_{opt} を導入する。理由は次のとおり。 $\lambda_{q,\text{opt}} (< 0)$ に対し、 $g(x)$ のグラフを描くと、この $g(x)$ が正となる x の集合が式 (13) の \bar{S}_{opt} であることが分かる。ここで仮に、同一の f と g に対し \bar{S}_{opt} と異なる $S_*(\in \mathfrak{S})$ を考えると、このグラフから自明に $\langle fg \rangle_{S_*} < \langle fg \rangle_{\bar{S}_{\text{opt}}}$ となることが見てとれる。それは $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) \geq 0$ 、更に $x \in \bar{S}_{\text{opt}}$ に対し $g(x) \geq 0$ 、また $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{S}_{\text{opt}}$ に対し $g(x) < 0$ であることによる。要するに、 $\bar{S}_{\text{opt}} = \arg \max_{S_* \in \mathfrak{S}} T_q[p, \lambda_{q,\text{opt}}]$ が成立する。また \bar{S}_{opt} 上で $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ であり、 $fg = |fg|$ である。

次に式 (14c) は、 $\|\cdot\|_{\alpha, \bar{S}_{\text{opt}}}$ の定義： $\|\cdot\|_{\alpha, \bar{S}_{\text{opt}}} = \left(\int_{\bar{S}_{\text{opt}}} |\cdot|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ と、ヘルダーの不等式 (2) から従う。その等号成立条件は、式 (3) により与えられる。

最後の藪漕ぎとして、式 (14d) の「 \leq 」は $f(=p^q(x))$ が \bar{S}_{opt} 以外の（可測な）集合上で正値を持つとき「 $<$ 」となり、 p が \bar{S}_{opt} 内のみで正値を持つとき「 $=$ 」が成立することに注意する。なお、式 (14d) の「山の頂上」とは q, σ のみで定まる定数のことである。

山の頂上へのルートは以上で現れた全ての「 $=$ 」を満たすルートであり、実際にそこへたどり着くためには、以上の「 $=$ 」を全て満たす p 、すなわち大域的最適解 p_{opt} を組み立てることが必要になる。この組み立てにおいて、まず等号成立条件 (3) が p_{opt} の概形を唯一に与え、更によく知られている積分公式

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \frac{1}{\gamma} B\left(1+\beta, \frac{1+\alpha}{\gamma}\right), \quad (15)$$

が、詳細を唯一に確定する。（計算の詳細は文献(9).）結果として、定理 1 の主張のとおり $0 < q < 1$ の場合、カットオフを持つ密度関数 p_{opt} が唯一の大域的最適解として得られる。□

以上のルートを振り返ってみると、本質的なのはヘルダーの不等式とその等号成立条件であり、これを三度の藪漕ぎと積分公式 (15) が支えていることが分かります。相当な数の先行研究のある中で、これほどシンプルなルート（けもの道）が未発見であったことは、なかなか愉快なことではないでしょうか。

2.4 発見の喜びと遭難、そして生還

2.3 のエレガントな証明を発見した喜びの勢いから、 $1 < q < 3$ の場合の、以下の定理 2^(注8) の初等的証明に取り掛かりました。軽装でたどれるルートがあるはずとの直観にしがたが、けもの道を進みます。しかし、そのうちに定理 1 の場合とは少々地形が違うように思われてきました。逆ヘルダーの不等式 (4) を頼りに進みますが、どうもすっきりしません。この場合は、とにかく低い方へと藪を漕ぐのですが、以下の出発点となる式 (17) で $\langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle$ であり、自然には低い方へとたどれない地形になっています....

2.3 のエレガントな別証明の発見の喜びにとらわれた筆者は、

(注8)：これも文献(9)で既に得られています。

ここでもヘルダーの不等式のみで行けるのではないかと、ルート探索を行います。例えば、 $\langle fg \rangle = \langle |fg| \rangle$ となるような不定乗数 λ_q しかあり得ないことを示せばよさそうです。しかし、そのために厄介な計算と背理法の藪漕ぎが連続し...、冒頭の山中の4時間を再現し、机上の半年近いルート探索に疲弊してしまった自分に気が付きました。

とうとう筆者は、「ま、別の問題に取り組みますか...」と、この問題を一旦、諦めました。ところがその日の晩のこと、ふと森口先生の論文⁽³⁾を思い出しました。森口先生は1977年東大を御退官後、筆者の所属する電通大に奉職され、全く面識もないものどどこかしらで御縁のある方かと、勝手ながら筆者は思い込んでおりました。そんな森口先生の論文⁽³⁾が、よく理由も分かりませんが、強力なインパクトをもって思い出されてきたのです。筆者はこの論文⁽³⁾を、2012年頃ふとしたきっかけで目にし、当時取り組んでいた「注入同期最適化問題」に役に立つかと期待して読みました。しかし、その印象は当面必要ないので不要だろう、とすっかり忘却していたのでした。翌日、この論文を研究室で読み返しながら、無意識に森口先生にお伺いを立てていました。

筆者：森口先生、私は森口先生の問題⁽³⁾と類似の問題に取り組んでおります。僭越ながら、森口先生の証明よりエレガントなものを探しているうちに、ルートを外れ困っております。森口先生の論文⁽³⁾がヒントになる気がしてならないのです...

(想像上の) 森口先生：田中君、探索御苦労様。確かに私の仕事⁽³⁾はヒントになるでしょう。まず、これで安心して、じっくりルートを検討してみてください。

文献(3)の方法は、大域的最適解を(従来研究^{(9)~(11)}、(13)、(14)と同じく)天下りに与えた上で、(ダイバージェンスならぬ)テイラー展開の中間値の定理(テイラーの定理)によって、これが唯一の大域的最適解であることを示します^(注9)。この文献(3)の方法によれば、取り組み中の $1 < q < 3$ の場合の Tsallis エントロピー最大化問題に別証明が付くことが(その日のうちに)判明しました。これは一つの驚きでした。というのは、森口先生の問題と異なり、取り組み中の問題(9)では凸性が成り立たないからです。しかしこの方法は、2.3のエレガントな証明の美学、すなわち不等式により大域的最適解を組み立て、同時にその唯一性を示すものとは相容れないことも分かりました。

森口先生との(想像上の)対話の後で、落ち着きを取り戻した筆者は、自分の「美学」に折り合いをつけ、「地形」を見る余裕を持ちました。地形を読むことができれば、エレガントな証明は自然についてくるはずです。まず、出だしの式(17)で $\langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle$ となる場所です。ここで $\langle fg \rangle = \langle |fg| \rangle$ となる $f (= p^q(x))$ が空集合でなければ^(注10)、そのような f に限定して議論を進めてみようと思ひ付きます。これは、往路の下りのルートで尾根根元に岩を飛び渡る感覚です。空集合でないこと、つまり飛び渡る先の岩がある限り OK です。そして、その先に目指す大域的最適解が控えているのは(式(17)から)明らかです。この飛び渡る代償として、復路の上りのルートでは、別の

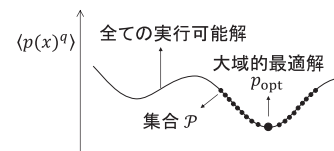


図1 関数空間 \mathcal{D} 内の集合 \mathcal{P} と大域的最適解 p_{opt}

ルートを通る必要が生じます。このルートとして、森口先生流のルート、すなわちテイラーの定理による安心安全なルートを既に上記のとおり確保しています。しかし、もっとシンプルなもの道があるはず...。はい、確かにありました。旅先で得た結果ですが、もはやテイラー展開すら不要で、以下の式(20b)の中学生でも理解可能な簡単な不等式で片付けてしまいました。定理2⁽⁹⁾ ($1 < q < 3$ の場合の Tsallis エントロピー最大化)。 $1 < q < 3$ に対し、以下の確率密度関数 $p_{\text{opt}}(x)$ は、Tsallis エントロピー最大化問題(7)、(9)の唯一の大域的最適解である。

$$p_{\text{opt}}(x) = \frac{1}{Z_q} \exp_q(-\beta_q x^2)$$

ただし、 Z_q, β_q は以下のとおり：

$$Z_q = \sqrt{\frac{3-q}{q-1}} \sigma B\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \beta_q = \frac{1}{(3-q)\sigma^2}.$$

筆者による別証明。定理1の別証明と同じく、 $p(x)$ と λ_q を最大化問題(9)の実行可能解とし、その中で大域的最適解を $p_{\text{opt}}, \lambda_{q,\text{opt}}$ とする。ここでは、 f と g を次により定義する：

$$f(x) = p^q(x) (\geq 0), \quad (16a)$$

$$g(x) = \lambda_q x^2 + (1 - \lambda_q) \sigma^2 \quad (\text{a.e. } x \in S \subseteq \mathbb{R}). \quad (16b)$$

そうすると、次が従う：

$$T_q[p, \lambda_q] = \langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle = \|fg\|_1. \quad (17)$$

さて、ここで予告済みの「岩を飛び渡る」ことをしよう。飛び渡る先の岩として、次の集合 \mathcal{P} を定義する：

$$\mathcal{P} = \{(p, \lambda_q) \mid \lambda_q x^2 + (1 - \lambda_q) \sigma^2 > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{すなわち、} \lambda_q \text{ は } 0 < \lambda_q < 1 \text{ の値を取る}\}.$$

図1のとおり、この集合 \mathcal{P} は大域的最適解 $(p_{\text{opt}}, \lambda_{q,\text{opt}})$ を含み、無数の元を持つ。ここでは省略するが、その証明は、 p_{opt} を変形し \mathcal{P} の条件を満たす実行可能解 (p, λ_q) を具体的に構成することで容易に得られる。そこでひとまず、 \mathcal{P} 内の実行可能解 (p, λ_q) に限定して進む。まず明らかに、式(18a)が従い、式(18b)は逆ヘルダーの不等式(4)から、式(18c)も $\|p^q\|_{\frac{1}{q}} = \langle |p(x)|^q \rangle = 1$ から自明である：

$$T_q[p, \lambda_q] = \langle fg \rangle = \langle |fg| \rangle = \|fg\|_1 \quad (18a)$$

$$\geq \|p^q\|_{\frac{1}{q}} \|\lambda_q x^2 + (1 - \lambda_q) \sigma^2\|_{\frac{q-1}{q-1}} \quad (18b)$$

$$= \|\lambda_q x^2 + (1 - \lambda_q) \sigma^2\|_{\frac{q-1}{q-1}} = \text{「谷底」}. \quad (18c)$$

2.3の定理1の別証明と同じく、「谷底」へ至るルートを、式(18)の全ての「=」を満たす p を組み立てることによりたどる。

(注9)：恐らく森口先生は問題の凸性に気付かれたのではないのでしょうか。

(注10)：この証明は具体的に f を構成することで与えられます。

この場合も、逆ヘルダーの不等式の等号成立条件 (5) と、式 (15) に類似の積分公式

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\gamma)^\beta} = \frac{1}{\gamma} B\left(\beta - \frac{1-\alpha}{\gamma}, \frac{1-\alpha}{\gamma}\right) \quad (19)$$

により、定理 2 の主張する $p_{\text{opt}}(x)$ が唯一に定まる。また $\lambda_{q,\text{opt}}$ は $\lambda_{q,\text{opt}} = \frac{1}{2}(q-1)$ と得られ、確かに上記の \mathcal{P} の条件を満たしている。こうして「谷底」まで来たが、この谷底が唯一の真の谷底であることを確かめる復路を、これからたどる。具体的には、(\mathcal{P} の制限を外した) 任意の実行可能解 p と上で得た p_{opt} を比較すれば十分である。

先に述べた森口先生のルートは、実行可能解 p と大域的最適解 p_{opt} について、 $\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ と $\langle p_{\text{opt}}^q(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ の大小関係をテイラー展開の中間値の定理によりたどっている。一方、筆者のけもの道は、以下の式 (20) のあっさりとした不等式をたどるのみである：

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left[\langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} - \langle p_{\text{opt}}^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} \right] \\ &= \left\langle \left[\lambda_{q,\text{opt}} x^2 + (1 - \lambda_{q,\text{opt}}) \sigma^2 \right] \left[p^q(x) - p_{\text{opt}}^q(x) \right] \right. \\ & \quad \left. + q A^{\frac{q-1}{q}} [p_{\text{opt}}(x) - p(x)] \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad (20a) \end{aligned}$$

$$= A^{\frac{q-1}{q}} \left\langle p_{\text{opt}}(x) \left\{ \left[\frac{p(x)}{p_{\text{opt}}(x)} \right]^q - q \frac{p(x)}{p_{\text{opt}}(x)} + q - 1 \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}} \geq 0. \quad (20b)$$

式 (20) の説明は以下のとおり。まず式 (20a) 内で、 $\langle (x^2 - \sigma^2)p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ 、 $\langle (x^2 - \sigma^2)p_{\text{opt}}^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ に注意する。 p, p_{opt} はいずれも実行可能解であり、制約条件 (8) を満たすからである。同様に正規化条件から $\langle p_{\text{opt}}(x) - p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle p_{\text{opt}}(x) \rangle_{\mathbb{R}} - \langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ である。次に、等号成立条件 (5) と式 (16b) から $\lambda_{q,\text{opt}} x^2 + (1 - \lambda_{q,\text{opt}}) \sigma^2 = A^{\frac{q-1}{q}} p_{\text{opt}}^{1-q}(x)$ を得るが、これを式 (20a) に代入して式 (20b) を得る。後は、 $X^q - qX + q - 1$ のグラフを描くだけである： $q > 1$ のとき $X^q - qX + q - 1 \geq 0$ ($\forall X \geq 0$) であり、等号成立は $X = 1$ のときのみである。この X を $X = \frac{p(x)}{p_{\text{opt}}(x)}$ と置くと、確かに p_{opt} が唯一の大域的最適解であることが分かる。□

森口先生のおかげで、どうやら生還できたようです。

2.5 論文執筆と遭難、そして展望

生還の喜びは続きます。ここまでに発見した別証明のアイデアを、先行研究^{(11)~(15)}の問題群に適用始めました。そうすると、どの問題もヘルダーの不等式に帰着され、いずれも先の定理 1, 2 の別証明と同じく、あっさり片付くようです！一つや二つの問題が解けるならまだしも、関連する問題群が一つ of アイデアで網羅的に解けるとなると... これは面白いかも!?!と、感じ始めた筆者は、その時点で得られていた結果をまとめ論文投稿を検討しました。投稿先として、地味に数理論理学系、あるいはエントロピーの専門誌でもよかったのですが、「生還の喜び」の勢いから大胆にも情報理論のトップジャーナルへ投稿してしまいました。結果は、初めの査読ではポジ・ネガが 2 対 1 となり再投稿の流れとなり、2 度目の査読では逆に 1 対 2 とな

りリジェクトと相成りました。ネガティブなコメントに共通するのは、「情報理論の結果としての新規性に欠けます。ただし、もしこの方法で情報理論の新たな問題が解けるなら認めましょう。」ということで、確かにおっしゃるとおりです。

二度の査読の過程で、驚きや感動がありました。一人の査読者は、査読ごとに長大なレビューノートを作成し、合計 80 数項目にわたる詳細な修正案を提示して下さいました。二度目の査読では「これは友情からくるものです」とありました。国を越えて何ものかが伝わったのでしょうか？ また、もう一人の査読者からは以下のコメントが届きました：

‘The results presented are not new, but the interest of the paper lies elsewhere: it is the method of proof which is important. This method is exquisitely elegant and efficient. I find it personally hard to believe that this trick has never been employed elsewhere. In any case, despite my reservations about the writing style, this paper has taught me something that I believe could be useful to many researchers interested in such inequalities, and I therefore support its publication, although not before the authors have gone (once more, it seems) through an extensive clarification work.’

幾らか社交辞令もあるでしょうが、この査読者には筆者の「喜び」が伝わったのでしょうか！ しかしながら 2018 年 10 月の現時点、筆者は次善のジャーナルに投稿すべく（遭難と言わないまでも）いまだ山から下りていない状況です。

最後に、2.2 で先送りになっていた一般化エントロピーの最大化問題の例を幾つか紹介し、筆者のアイデアがどのように活用されるかを説明します。先行研究を古い順に、かいつまんで見ていきます。筆者の知る限り、元祖は 1952 年の森口先生の仕事⁽³⁾でしょう。その後、間が空きますが、Vignat ら⁽¹¹⁾、Tsukada ら⁽¹²⁾、Lutwak ら⁽¹³⁾、⁽¹⁴⁾、Eguchi ら⁽¹⁵⁾と続きます。まず森口先生の問題^(註11)は：

$$\underset{p(x) \in \mathcal{D}}{\text{minimize (あるいは, maximize)}} \langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}} \quad (21a)$$

$$\text{subject to } \langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 1, \quad (21b)$$

$$\langle x^2 p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = \sigma^2 \text{ (定数)}. \quad (21c)$$

この問題は、Rényi エントロピー (10) の最大化問題と等価です。大域的最適解は、定理 1, 2 の場合と同じく q -ガウシアンとなることが知られています^{(3), (11), (12)}。この問題で筆者のアイデアはどのように活用されるのでしょうか？ 先の式 (12), (16) を思い出せば、迷うことなく： $f(x) = p^q(x)$ 、 $g(x) = 1 + \lambda_q(x^2 - \sigma^2)p^{1-q}(x)$ とすればよいことが分かります。あとは定理 2 の別証明のほぼ繰り返しとなります。

次に、Vignat ら⁽¹¹⁾は、(後で述べますが) 森口先生の問題 (21) の多変数版に解答を与えています。更に、Tsukada ら⁽¹²⁾は、彼ら独自のエレガントな方法により、上記の連続変数の問

(註11)：ただし、森口先生は文献(3)で $q > 1$ の場合のみ取り扱われています。

題 (21) のみならず、以下の離散変数の問題にも解答を与えています：

$$\underset{p \in \mathcal{M}}{\text{minimize (あるいは, maximize)}} \sum_{i=1}^n p_i^q \quad (22a)$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n e_i p_i = E (= \sigma^2), \quad (22b)$$

ただし、 $p = (p_1, \dots, p_n)$ 、 \mathcal{M} は確率質量分布の全体、 e_i は重みであり、例えば $e_i = i^2$ 、 $E = \sigma^2$ と置くと、上記の森口先生の問題の離散版となります。また $p_i = i^2$ と置き、式 (22b) の制約条件の後者を $\sum_{i=1}^n (i^2 - \sigma^2) p_i^q = E$ に置き換えると、Tsallis エントロピー最大化問題 (7)、(9) の離散版となります。これらの問題に筆者のアイデアは活用可能でしょうか？ 結論は Yes です。実はヘルダーの不等式とその等号成立条件は、離散変数の場合も同様に成り立つからです⁽⁴⁾。例えば、Tsallis エントロピー最大化問題 (9) の離散版では、式 (12)、(16) を離散化した

$$f_i = p_i^q, \quad q_i = \lambda_q i^2 + (1 - \lambda_q) \sigma^2 \quad (1 \leq i \leq n), \quad (23)$$

からスタートし、先の定理 1, 2 の別証明内の $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ を $\sum_{i=1}^n$ に置き換えるだけです。もっとも離散化に伴う工夫は別に必要です。

最後に、多変数版の森口先生の問題を更に一般化した Lutwak ら⁽¹³⁾、⁽¹⁴⁾ の問題 (の一つ)^(注12) を見てみましょう：

$$\underset{p(x) \in \mathcal{D}}{\text{maximize}} \langle p^q(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad (\text{ただし, } q > \frac{n}{n+p}) \quad (24a)$$

$$\text{subject to } \langle p(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 1, \quad (24b)$$

$$\langle |x|^r p(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} = (\text{定数}). \quad (24c)$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$ は実ベクトル、 $|x|$ はその長さ $\sqrt{x \cdot x}$ を示します。Lutwak ら⁽¹⁴⁾ は、この問題に対し、一般化ガウシアン： $p_{\text{opt}}(x) = a_{r,q} \{1 + (1-q)|x|^r\}_+^{\frac{1}{q-1}}$ が大域的最適解であることを示しています^(注10)。この一般化ガウシアンですが、もちろん $r = 2, n = 1$ と置けば、先の q -ガウシアン $\frac{1}{Z_q} \exp_q(-\beta_q x^2)$ となります。また特に $r = 2$ の場合は、Eguchi ら⁽¹⁵⁾ により別の観点(統計的推定)から、独立に解答が与えられています。さて、この問題に筆者のアイデアは活用されるでしょうか？ これもまた、Yes です。ヘルダーの不等式とその等号成立条件は、多変数関数 f, g についても成立するからです。したがって(多変数化に伴う工夫が少々必要ですが、大枠)先の定理の別証明で $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ を $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ に置き換えるだけとなります。ちなみに式 (20) も全く同じ形のままです。

蛇足になるかもしれませんが、Tsallis エントロピー最大化問題 (7) で、制約条件 (8) の $h(x)$ が $h(x) = x$ の場合、大域的最適解は $\frac{1}{Z_q} \exp_q(-\beta_q x)$ の形となることが知られています(例えば文献(9)の Theorem 2.2)。この場合は、式 (16) に対応する $f(x) = p^q(x), q(x) = \lambda_q x + (1 - \lambda_q) \sigma^2$ と置けば、後は定理 2 の別証明に従い、そこでの \mathbb{R} を一律 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ に置き換えるだけで OK です。

2.3 の初めに述べましたが、森口先生⁽³⁾を除く全ての先行研

(注12)：本稿は、文献(14)の Theorem 3 (p.1606) の問題を題意を損なわない範囲で変形しています。ただし $a_{r,q}$ は r, q に対し決まる定数、 $\{\cdot\}_+ = \max\{0, \cdot\}$ 。

究の考え方は共通しています。すなわち、いずれもあらかじめ大域的最適解を既知として与え、これと任意の実行可能解の間に一般化ダイバージェンス^(注13) (あるいは、その類のもの)を導入し、大域的最適解の証明を与えます。この共通した考え方は、シャノンエントロピー最大化の証明法(例えば文献(16)の Theorem 8.6.5)の、よく知られている「定石」によるものと思われま。すなわち、ガウシアンと他の密度関数の間に KL ダイバージェンス(相対エントロピー)を導入して、ガウシアンの大域的最適性を導くものです。そして、元祖森口先生の 1952 年の仕事⁽³⁾は(時代的に)このシャノン理論の影響から自由だったことも想像が付きま。

以上のように、諸々の問題がヘルダーの不等式により束ねられる様子を見るにつけ、筆者には「焼き鳥」のイメージが浮かんできました。様々な具材(個別の先行研究)が 1 本の竹串(ヘルダーの不等式)で束ねられるイメージです。この竹串が、今後、その真価を発揮することがあるでしょうか？ すぐに二つ思い付きま。一つは、最適解が複数存在して、その解の特徴付け自体が必要となる問題です。一般化エントロピーの分野には筆者の知る限り、そのような先行研究はないようです。しかし、文献(1)で紹介しました「注入同期最適化問題」には複数の最適解が存在しています。もう一つは、問題が複雑となり、すっきりした見通しを得ること自体が必要な場合です。例えば、現在も研究が盛んである「条件付」Rényi エントロピー⁽¹⁷⁾に絡む問題です。いずれも、現時点、筆者の想像の域を出ませんが...

3. 注入同期最適化理論の有効性と展望

2.5 ではヘルダーの不等式が、一般化エントロピーの種々の問題を束ねる様子を見ました。このようなことが、同期現象(特に注入同期)と呼ばれる古くから知られる非線形問題を最適化する際にも現れま。その様子を以下で見ましよう。

3.1 発振器の注入同期最適化問題

「注入同期 (injection locking)」という技術は、近年、地味に注目を集めているトピックです。2016 年 1 月の解説論文「非線形問題とヘルダーの不等式」⁽¹⁾で紹介しましたが、注入同期現象とは自励発振器(非線形振動子)に外部信号(入力)を強制注入すると発振器が外部信号に同期する基本的な物理現象です。

この注入同期の性能を評価する尺度として、ロックレンジ(locking range)は重要で。ロックレンジとは注入同期が成立する外部信号(入力)の周波数帯域のことであり、これが広ければ、より柔軟かつロバストな注入同期が得られるからです。図 2(a)に示すように、縦軸の $\Delta\omega$ は発振器の自励発振周波数と入力周波数の差(離調)を表し、横軸は入力の強度を表します。この、くさび状のロックレンジ^(注14)すなわち同期化領域の外で

(注13)：文献(9)、(11)~(15)に現れるダイバージェンスは、それぞれ Tsallis relative entropy, Bregman information divergence, relative λ -Rényi entropy power, projective power divergence と呼ばれ、互いに異なる形を持ちま。

(注14)：非線形ダイナミクスの分野では、これをアーノルドタングと呼ぶ。

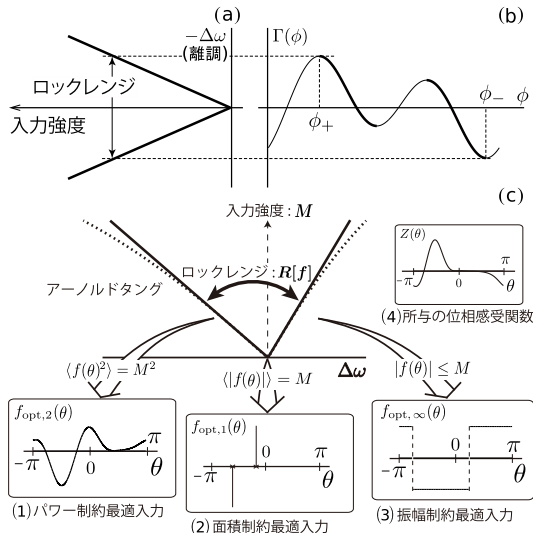


図2 (a) ロックレンジ, (b) 位相結合関数, (c) 最適入力の様子. (文献(1) から転載.)

は、同期が成立せず利用不可能です。以下では入力の強度が十分小さな弱入力の場合を仮定しますが、これは入力（電流）がデバイスを損傷しないために、また省電力性の要請からも、自然で合理的なものです。

この注入同期という非線形現象に対して、位相縮約⁽¹⁾、⁽¹⁸⁾という枠組みが、一般に弱入力の非線形振動子に対して有効です。その結果、任意の非線形振動子は次元の非線形方程式（位相方程式）に縮約され、注入同期の成立条件は、この方程式の安定平衡点の存在と等価になります（図2(b)）。これらにより、ロックレンジを最大化することは、以下の注入同期最適化問題として定式化されます⁽¹⁾：

$$\underset{f \in L_p}{\text{maximize}} \quad L[f] = \langle f(\theta) [\bar{Z}(\theta) + \lambda] \rangle_{[0, 2\pi)} \quad (25a)$$

$$\text{subject to} \quad \|f\|_p = M, \quad (25b)$$

ただし、入力 $f(\theta)$ は正規化変数 $\theta \in [0, 2\pi)$ の周期関数であり、 p 乗可積分、すなわち $\|f\|_p = M < \infty$ とします^(注15)。また $\bar{Z}(\theta)$ は発振器に対し定まる位相感受関数 $Z(\theta)$ ⁽¹⁾、⁽¹⁸⁾ により、 $\bar{Z}(\theta) = Z(\theta + \Delta\phi) - Z(\theta)$ と与えられます（ $\Delta\phi$ は任意パラメータ）。 λ は先の λ_q と同じく未定乗数であり、この問題の制約条件⁽¹⁾： $\langle f(\theta) \rangle_{[0, 2\pi)} = 0$ を組み込むために必要です。

以上の注入同期最適化問題は、**2.3** の別証明と同じくヘルダーの不等式のみにより解決可能です。その結果は、図2(c)の(1)、(2)、(3)に示すように、 $1 < p < \infty$ （特に $p = 2$ ）、 $p = 1$ 、 $p = \infty$ の3通りに対し、それぞれ得られます^(注16)。（各々の概要については、文献(1)、(6)、(8)、(19)。）図2(c)の(1)パワー制約ですが、回路的には入力の実効値を一定に制約するものです。また(2)面積制約、(3)振幅制約は、それぞれ入力が1周期間で掃引する「面積」、到達する最大振幅を一定に制約するものです。これらの現実的制約条件が以上の注入同期最適化問題に

(注15)：その結果、 f は十分広いクラスの関数をカバーし、またヘルダーの不等式(1)とも対応がつかます。

(注16)：ここでは、例として、図2(a)に示す、周期的自発発火を示す Hodgkin-Huxley ニューロンモデル⁽⁶⁾、⁽¹⁹⁾ から得られる Z を対象としています。

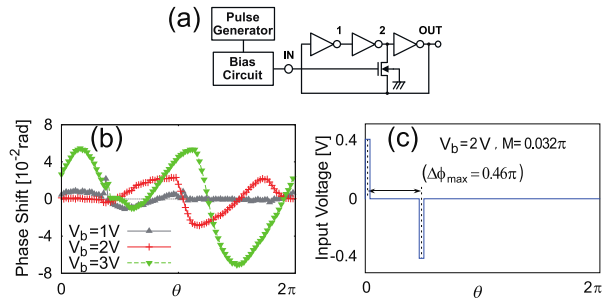


図3 CMOS リングオシレータの場合。図中の V_b はバイアス電位、 M は式(25b)で定義される値、 $\Delta\phi$ は正負一対のパルスの位相差を示す。(a) 回路構成、(b) 3段の場合の $Z(\theta)$ 、(c) 3段の場合の最適パルス（面積制約）入力波形。(文献(21)より転載.)

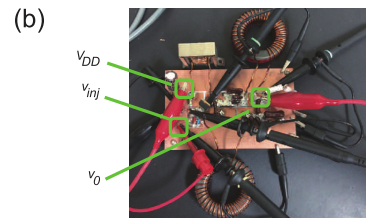
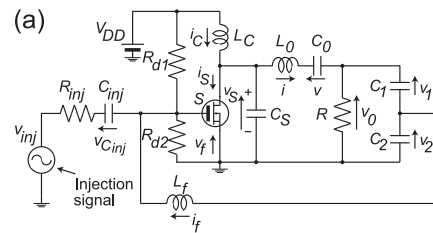


図4 注入同期型 E 級発振器の場合。(a) 回路図、(b) 回路実装の様子。(文献(22) から転載.)

内包されていて、ヘルダーの不等式と自然に対応がつく、という仕掛けです。

以上の結果は、2016年の文献(1)で報告済みですが、最近そのアルゴリズム特許⁽²⁰⁾が成立し、現在に至るまで、実用上重要な発振器に対し理論の適用が進んできました。以下に、その結果をかいつまんで説明します。まず図3のCMOSリングオシレータですが、これは現在の無線通信でも多用される発振器です。この発振器において、パルス入力による注入同期最適化が可能となりました。結果は図3(c)に示すように、リングオシレータの段数に依存して異なるパルス列として得られます⁽²¹⁾。次に、パワーエレクトロニクスの分野で多用されているE級発振器（図4）ですが、この発振器に対し、3通りの現実的制約条件の下での最適入力はそれぞれ図5(a)、(b)、(c)のように得られます。この回路では既に実際の回路でも最適化理論の結果が検証されています⁽²²⁾。これらの理論の現実的問題への適用は、千葉大関屋研究室の協力の下で、筆者の研究室の社会人ドクターの矢部君が進めて下さいました。

以上のとおり、確かに理論は最適入力を求めるために役に立つと言えます。しかし、幾つかの課題も明らかになってきました。例えば、最適入力をどこまで正しく（精度良く）求めることができるかは、位相感受関数 $Z(\theta)$ がどこまで精度良く求まるかに依存します。幸い、以上の二つの回路では、実際の回路

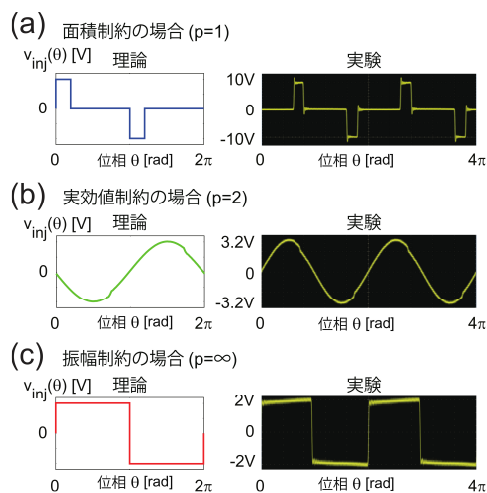


図5 各制約条件下における最適入力波形。各図中の左側が理論解、右側が実験においてファンクションジェネレータにより生成した波形を表す。(a)面積制約の場合、(b)パワー制約の場合、(c)振幅制約の場合。(文献(22)から転載.)

と回路シミュレータの相性が良く、数値的に得られた $Z(\theta)$ が信頼できました。しかし、この $Z(\theta)$ を (回路シミュレータに頼らず) 回路から直接に「計測」することはできないでしょうか？ その可能性は十分あります。というのは、原理的に $Z(\theta)$ のフーリエ級数の第 n 調波はその回路に正弦波を入力し $n : 1$ 同期のアーノルドタングを求めることにより得られるからです (詳細は特許(23)を参照)。恐らく、丁寧な回路実験を根気良く行うことのできる方ならこの計測を容易に実行可能でしょう。

3.2 MEMS の位相縮約振動工学

現在のナノ・マイクロエレクトロメカニカルシステム (N/MEMS) の重要課題として、例えば次の三つがあります。まず (i) 原子間力顕微鏡や微小質量計測に代表される計測・センシングデバイス、(ii) 従来の CMOS リングオシレータや水晶発振器を超えるクロック信号生成デバイスの実現、更に (iii) 多数の N/MEMS を結合して新たな能動的機能を創出すること、です。これらの対象では応用からの要請により、この 10 年間で強制振動系 (共振器) から自励振動系 (発振器) へ研究がシフトしています。ここでは、紙面の制約により、MEMS の発振器のみをフォーカスし、そこで従来の振動工学の枠組みを広げる「位相縮約振動工学」という新たな体系が構築される見通しについて紹介します。

MEMS の発振器において、筆者の知る限り、元祖は Yabuno ら⁽²⁴⁾ であると考えます。これは原子間力顕微鏡への応用からの必要によるものですが、マイクロカンチレバーを自励振動させるために速度センサを含むフィードバック回路を導入しています。結果として、彼らの理論的予想どおり、ファンデルポールの非線形振動を世界初で生成しています。このフィードバックを用いて自励振動させる方法は、その後 10 年間で大きく進展し、現状ではメカニカル要素とフィードバック回路がワンチップ上で実装されるようになってきました。例えば、Agrawal ら⁽²⁵⁾、Antonio

ら⁽²⁶⁾を皮切りに、幾つもの成果が PRL や Nature 系列誌を騒がせています。特に、NTT 物性科学基礎研究所の岡本、山口ら⁽²⁷⁾は、ある材質のカンチレバーにレーザー光を照射するのみで自励振動を生じるという新奇な結果を報告しています。これは、このカンチレバーが粘弾性体として (プルンプルンと) 振動することによるもので、内在する遅延フィードバック効果による振動といえます。更に、この結果を基に、太田ら⁽²⁸⁾は同様の材質とレーザー光によるフィードバック要素を組み合わせ、複数の振動モードを切り換えて生成可能な、あたかも生きているようなデバイスを構築しています。

さて、このように多様化、複雑化する MEMS の発振現象に対し理論的にどのように取り組めばよいのでしょうか？ 現状の理論的アプローチは、従来の振動工学の枠組みで行われています。これは連続体の振動を、極論すれば一つの質点の振動として粗く近似することに相当し、単純な振動モードにのみ近似的に成り立つという限界があります。そのために、文献(27)のような曲げモードや、ねじりモード等の混在する本来、無限自由度の複雑な振動状態の取り扱いが容易ではありません。もちろん、最近のモデル縮約の研究の成果は重要であり、その「汎用性」は大きなメリットですが、(発振現象に対しては) 結果として得られる低次元モデルの「精度」を十分高く保証することは容易でないようです⁽²⁹⁾。ところが、自励発振に限れば、極めて有効な理論的枠組みが、この数年で得られています。中尾、柳田、河村⁽³⁰⁾等の成果は、(彼らの反応拡散系のみならず) 無限自由度のシステムがリミットサイクル解 (例えば MEMS の自励発振状態) を持つとき、そのダイナミクスを **3.1** で述べた一次元の位相方程式に十分高い精度で縮約することを可能にしています。これは、けもの道ではない、立派に舗装された道が既に敷かれていることに相当します。これを現実問題に適用する際には、**3.1** と同じく、信頼できるシミュレータがあれば十分です。

現状、MEMS の機械振動部分の形状・材質がどれほど複雑であっても、これに忠実な有限要素法シミュレーションが可能になっています。このシミュレーション上の仮想の実験系から、「直接法」^{(1), (18), (30)} と呼ばれる方法により位相縮約の肝となる位相感受関数を高い精度で得ることも可能です。すなわち、ひとたび MEMS に対し機械振動部分とフィードバック部分の連成シミュレーションを整備すれば、数値的位相縮約による方程式の低次元化を経て、上記の三つの重要課題に対し数理的設計・合成・最適化が可能となる見通しが得られます。以上の「位相縮約振動工学」と呼ぶべき新規な枠組みは、実験と理論の協働可能な豊かな土地へ導く一筋の道となると考えます。そして、その道の先に、究極の自励振動系である「心臓」において、注入同期による未知の分散ベースメーカーの設計論の発見が待ち受けていることは十分にあり得ることでしょう。

謝辞 本稿をまとめるにあたり多くの方々のお世話になりました。特に以下の方々のコメントに感謝しております：畔上秀幸先生、大石進一先生、太田竜一先生、大平徹先生、柏木雅英先生、唐沢好男先生、河村洋史先生、須鎗弘樹先生、関屋大雄先生、高安亮紀先生、塚田真先生、中尾裕也先生、長谷川晃先生、藪野浩司先生、矢部洋司君、山口浩司先生、脇隼人先生、Jürgen

Kurths 先生 (50 音順). また, 日頃議論頂く非線形問題研究会の先生方, 大濱靖匡先生, 中川正基先生, 並びに研究室の各位に感謝致します. 最後に太田五雄先生の御厚誼に感謝致します. 本研究の一部は科研費基盤研究 B: 注入同期の実現可能限界を達成する最適設計論の確立および応用開拓, 科研費基盤研究 B: 位相縮約による「生きている」連続体振動のデザイン・最適化理論の開拓, の下で行われました.

文 献

- (1) 田中久陽, “非線形問題とヘルダーの不等式,” IEICE Fundamentals Review, vol. 9, no. 3, pp. 219–228, Jan. 2016.
- (2) 屋久島—宮之浦岳 2012 年版 (山と高原地図 59), 太田五雄 (編), 昭文社, 東京, 2012.
- (3) S. Moriguti, “A lower bound for a probability moment of any absolutely continuous distribution with finite variance,” Ann. Math. Stat., vol. 23, pp. 286–289, Nov. 1952.
- (4) G. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- (5) W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
- (6) H.-A. Tanaka, “Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators,” Physica D, Nonlinear Phenomena, vol. 288, pp. 1–22, Nov. 2014.
- (7) 須鎗弘樹, 複雑系のための基礎数理—べき乗則とツァリスエントロピーの数理, 星野書店, 東京, 2010.
- (8) H.-A. Tanaka, I. Nishikawa, J. Kurths, Y. Chen, and I.Z. Kiss, “Optimal synchronization of oscillatory chemical reactions with complex pulse, square, and smooth waveforms signals maximizes Tsallis entropy,” Europhysics Lett., vol. 111, no. 5, 50007, Sept. 2015.
- (9) S. Furuichi, “On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics,” J. Math. Phys., vol. 50, p. 013303, Jan. 2009.
- (10) L.L. Campbell, “A coding theorem and Rényi’s entropy,” Inf. Control, vol. 8, pp. 423–429, Aug. 1965.
- (11) C. Vignat, A.O. Hero III, and J.A. Costa, “About closedness by convolution of the Tsallis maximizers,” Physica A, vol. 340, pp. 147–152, Sept. 2004.
- (12) M. Tsukada, H. Suyari, and M. Kato, “The maximum entropy principle as a convex programming problem and related inequalities,” Proc. the fourth Int. Conf. on Nonlin. Anal. and Convex Anal. (NACA2005), pp. 643–655, 2007.
- (13) E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, “Cramér-Rao and moment-entropy inequalities for Rényi entropy and generalized Fisher information,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 51, no. 2, pp. 473–478, Feb. 2005.
- (14) E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, “Moment-entropy inequalities for a random vector,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 53, no. 4, pp. 1603–1607, March 2007.
- (15) S. Eguchi, O. Komori, and S. Kato, “Projective power entropy and maximum Tsallis entropy distributions,” Entropy, vol. 13, pp. 1746–1764, Sept. 2011.
- (16) T. M. Cover, J. A. Thomas, 情報理論—基礎と広がり—, 山本博資, 古賀弘樹, 有村光晴, 岩本 貢 (翻訳), 共立出版, 東京, 2012.
- (17) S. Arimoto, “Information measures and capacity of order α for discrete memoryless channels,” in Topics in Information Theory (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai), vol. 16, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1977.
- (18) 蔵本由紀, 河村洋史, 同期現象の科学—位相記述によるアプローチ, 京都大学学術出版会, 京都, 2017.
- (19) H.-A. Tanaka, “Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators, J. Phys. A, Math. Theor., vol. 47, no. 40, 402002, Sept. 2014.
- (20) “最適波形の演算方法、プログラム及び最適波形演算装置,” 特許第 6273871 号. <https://www.j-platpat.inpit.go.jp/web/PU/JPB-6273871/3CBCF4E731FCAF5E42FBF73169681B9C>
- (21) 矢部洋司, 西川 功, 中田一紀, 守川知行, 関屋大雄, 安藤芳晃, 田中久陽, “注入同期のロックレンジを最大化する入力信号波形—CMOS リングオシレータを例として—,” 信学論 (C), vol. J99-C, no. 6, pp. 298–313, June 2016.
- (22) 矢部洋司, 欧陽有界, 中川正基, 宇都宮健介, 永島和治, 関屋大雄, 田中久陽, “注入同期型 E 級発振器のロックレンジを最大化する入力波形の設計と実験検証,” 信学論 (A), vol. J101-A, no. 10, pp. 250–259, Oct. 2018.
- (23) “発振器の内部機構の推定方法、推定プログラム及び推定装置,” 特許第 5407088 号. <https://www.j-platpat.inpit.go.jp/web/PU/JPB-5407088/09EEF343A0C9334ADBC638756CD8F402>
- (24) H. Yabuno, H. Kaneko, M. Kuroda, and T. Kobayashi, “Van der Pol type self-excited micro-cantilever probe of atomic force microscopy,” Nonlinear Dyn., vol. 54, no. 1–2, pp. 137–149, Oct. 2008.
- (25) D.K. Agrawal, J. Woodhouse, and A.A. Seshia, “Observation of locked Phase dynamics and enhanced frequency stability in synchronized micromechanical oscillators,” Phys. Rev. Lett., vol. 111, no. 8, 084101, Aug. 2013.
- (26) D. Antonio, D.A. Czaplowski, J.R. Guest, D. López, S.I. Arroyo, and H. Zatzette “Nonlinearity-induced synchronization enhancement in micromechanical oscillator,” Phys. Rev. Lett., vol. 114, no. 3, 034103, Jan. 2015.
- (27) H. Okamoto, D. Ito, K. Onomitsu, H. Sanada, H. Gotoh, T. Sogawa, and H. Yamaguchi, “Vibration amplification, damping, and self-oscillations in micromechanical resonators induced by optomechanical coupling through carrier excitation,” Phys. Rev. Lett., vol. 106, no. 3, 036801, Jan. 2011.
- (28) R. Ohta, H. Okamoto, and H. Yamaguchi, “Feedback control of multiple mechanical modes in coupled micromechanical resonators,” Appl. Phys. Lett., vol. 110, no. 5, 053106, Jan. 2017.
- (29) L.V. Blarigan, J. Moehlis, and R. McMeeking, “Low dimensional modeling of a non-uniform, buckled piezoelectric beam for vibrational energy harvesting,” Smart Mater. Struct., vol. 24, 065012, May 2015.
- (30) H. Nakao, T. Yanagita, and Y. Kawamura, “Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-diffusion systems,” Phys. Rev. X, vol. 4, no. 2, 021032, May 2014.

(NLP 研究会提案, 平成 30 年 10 月 15 日受付,
平成 30 年 11 月 21 日再受付)



田中久陽 (正員: シニア会員)

1990 早大・電気卒. 1992 同大学院理工学研究科修士課程了. 1995 同大学院理工学研究科博士後期課程了. 博工 (工学). 同年から, 日本学術振興会特別研究員 (PD). 1996 カリフォルニア大パークレー校客員研究員. 1997 ソニーコンピュータサイエンス研究所研究員. 2001 電通大学院電気通信学研究科助教 (現在, 情報理工学研究科准教授), 現在に至る. 情報通信システム, 非線形物理等の分野横断的領域の研究に従事. 本会通信サイエティのアドホックネットワーク研究専門委員会幹事, 基礎・境界サイエティ庶務幹事, 複雑コミュニケーションサイエンス研究専門委員会発起人, 同副委員長などを務める. 2015 本会 NOLTA サイエティ功労賞受賞. 2006, 2007, 2009 第 22 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム技術賞), 第 23 回, 第 25 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム奨励賞) 各受賞. 著書に「非線形ダイナミクスとカオス 数学的基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで」(中尾裕也, 千葉逸人と共訳, 2015) 等がある.