

論文

非線形結合された二つの van der Pol 発振器の平均化法による
同期特性の解析清水 邦康^{†a)} 遠藤 哲郎^{†b)} 田中 久陽^{†c)}Averaging Method Analysis of Synchronization Characteristics of Two
Nonlinearly-Coupled Van der Pol OscillatorsKuniyasu SHIMIZU^{†a)}, Tetsuro ENDO^{†b)}, and Hisa-Aki TANAKA^{†c)}

あらまし 非線形的に相互結合された二つの van der Pol 発振器を平均化法により解析し、同相解、逆相解、二重モード解の特性を求めた。この同期化法は粘菌モデルから導かれた特殊な結合に基づき、結合は線形項のみならず、発振器の内部ダイナミクスに関与する非線形項にも及んでいる点に特徴がある。その結果、粘菌モデルとして有用な同相解の同期範囲は、従来の線形結合の場合に比べ非常に広くなることが過去のコンピュータシミュレーションにより知られている。本研究ではこのシステムを平均化法により解析的に研究し、各解の特性を具体的に求めた。中でも同相解の同期範囲は結合係数がある程度以上に大きくなると無限大となることを理論的に明らかにした。

キーワード 同期, 非線形結合, 平均化法, 熊手型分岐

1. ま え が き

発振器の相互同期は様々な方法で古くから研究されてきた。しかし、その大半は結合によって発振器自身の内部ダイナミクス自体は変わらない形での線形結合を仮定したものであり、このような系についてはこれまでに多くの解析結果が示されている [1]~[4]。近年、生物学の分野から、細胞性粘菌の結合方法をモデル化した相互同期化法が提案された [5], [6]。細胞性粘菌は単細胞アメーバの一種であり、飢餓状態下では多数が凝縮 (結合) し組織化され、擬似多細胞動物や擬似多細胞植物にもなり、細胞間のリズム同期が行われる [7]。この同期化法は次のようなものである。今、細

胞 j のリミットサイクル振動子が次のように書けると仮定する。

$$\frac{dP_j}{dt} = F_j(P_j, R_j), \frac{dR_j}{dt} = G_j(P_j, R_j)$$

ただし、 P_j は細胞 j の生産物濃度、 R_j は受容体の活動度を示すものとする。このとき、凝縮した N 個の細胞からなる組織は以下のように表すことができる [5]。

$$\begin{aligned} \frac{dP_j}{dt} &= F_j(P_j, R_j) \\ \frac{dR_j}{dt} &= G_j \left(P_j + \gamma \sum_{l=1}^N P_l, R_j \right), j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\gamma > 0$ は結合係数を表す。これは一般に N 個の振動子の非線形結合系となる。この結合方法の特徴は一般に結合項が方程式に対して線形的に加算されるだけでなく、振動子の内部ダイナミクスに関与する非線形項にも入ってくる点にある。

文献 [5], [6] ではこの方法で複数の発振器が共通の場合を介して非線形的に相互作用を行ういくつかの例を具体的に示し、それらのコンピュータシミュレーション

[†] 明治大学理工学部電子通信工学科, 川崎市

Department of Electronics and Communication, Meiji University, 1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, 214-8571 Japan

^{††} 電気通信大学電子工学科, 調布市

Department of Electronic Engineering, The University of Electro-Communications (UEC), 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182-8585 Japan

a) E-mail: shimizu@isc.meiji.ac.jp

b) E-mail: endoh@isc.meiji.ac.jp

c) E-mail: htan@ee.uec.ac.jp

の結果が示されている。その結果は従来の線形結合とはかなり異なる性質をもつことが分かった。すなわち、自然角周波数の大きく異なる発振器間でも、また種類の異なる発振器間でも同期が起こる例が示されている。本論文ではこの系を理論的に解析するための第一歩として二つの van der Pol 発振器を提案された方法で非線形的に結合した系を対象として平均化法による解析を行った。その結果、同相解、逆相解、二重モード解の特性を具体的に求めることができた。中でもある程度結合係数が大きくなると同相解の引込範囲が無限大になるという興味深い結果が得られた。

2. 平均化法による解析

一般に $j = 1, 2$ 番目の van der Pol 発振器は次式で表される。これは文献 [5], [6] で取り上げられたものと同じ形である。

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt} &= y_j \equiv X_j(x_j, y_j) \\ \frac{dy_j}{dt} &= -\omega_j^2 x_j + \varepsilon'(1 - x_j^2)y_j \equiv Y_j(x_j, y_j) \quad (2)\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon' > 0$ は非線形性の強さを、 ω_j は j 番目の発振器の無結合時の角周波数を表す。今、式 (1) のような非線形結合を考えると二つの相互結合された van der Pol 発振器は次式で表現される。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega_1^2 \{x_1 + \gamma(x_1 + x_2)\} \\ &\quad + \varepsilon'[1 - \{x_1 + \gamma(x_1 + x_2)\}^2]y_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega_2^2 \{x_2 + \gamma(x_1 + x_2)\} \\ &\quad + \varepsilon'[1 - \{x_2 + \gamma(x_1 + x_2)\}^2]y_2 \quad (3)\end{aligned}$$

式 (3) を x_1, x_2 についての 2 階の微分方程式の形に書き換え、変数変換 $\omega_1 t = t'$ を行い、 t' をあらためて t と置きなおし、かつ ε'/ω_1 を ε とおくと、次のような正規化された微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \{x_1 + \gamma(x_1 + x_2)\} \\ - \varepsilon[1 - \{x_1 + \gamma(x_1 + x_2)\}^2] \frac{dx_1}{dt} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \{x_2 + \gamma(x_1 + x_2)\} \\ - \varepsilon[1 - \{x_2 + \gamma(x_1 + x_2)\}^2] \frac{dx_2}{dt} = 0\end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) を 2 階のベクトル微分方程式に書き換えると次式のようなになる。

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \varepsilon\dot{\mathbf{x}} - \varepsilon \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ g_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (5a)$$

上式において

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x_1, x_2]^T \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} (1 + \gamma) & \gamma \\ \gamma \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 & (1 + \gamma) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \end{bmatrix} \\ g_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \{(1 + \gamma)x_1 + \gamma x_2\}^2 \dot{x}_1 \\ g_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \{(1 + \gamma)x_2 + \gamma x_1\}^2 \dot{x}_2 \quad (5b)\end{aligned}$$

とする。ただし $\cdot = d/dt$, $\ddot{\cdot} = d^2/dt^2$ である。線形変換 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ を式 (5a) に適用し、左から \mathbf{P}^{-1} をかけると次のようになる^(注1)。

$$\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})\mathbf{y} = \varepsilon\dot{\mathbf{y}} - \varepsilon\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ g_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで関数 g_1, g_2 は線形変換 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ を用いて $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ の関数として表されている。 \mathbf{B} の固有値を Ω_1^2 と $\Omega_2^2 (> \Omega_1^2)$ とし、対応する長さ 1 に正規化された固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1 = [p_{11}, p_{21}]^T$, $\mathbf{p}_2 = [p_{12}, p_{22}]^T$ とすると式 (6) は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ = \varepsilon \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ g_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \\ \equiv \varepsilon \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ f_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \quad (7a)\end{aligned}$$

(注1) : 式 (5a) に対し、線形変換を行って \mathbf{y} 領域の対角化された形にもっていく、このような解析が妥当な解を与えるのは、 γ があまり零に近くない場合である。 γ が零に近い場合の平均化法の適用例として文献 [1] がある。

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (7b)$$

関数 g_1, g_2 は式 (5b) に線形変換 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ を行うと、 $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ の関数として次のように表すことができる。

$$g_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \{(1 + \gamma)(p_{11}y_1 + p_{12}y_2) + \gamma(p_{21}y_1 + p_{22}y_2)\}^2(p_{11}\dot{y}_1 + p_{12}\dot{y}_2)$$

$$= A^2p_{11}y_1^2\dot{y}_1 + 2A\tilde{B}p_{11}y_1\dot{y}_1y_2 + \tilde{B}^2p_{11}\dot{y}_1y_2^2 + A^2p_{12}y_1^2\dot{y}_2 + 2A\tilde{B}p_{12}y_1y_2\dot{y}_2 + \tilde{B}^2p_{12}\dot{y}_2y_2^2$$

$$g_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \{(1 + \gamma)(p_{21}y_1 + p_{22}y_2) + \gamma(p_{11}y_1 + p_{12}y_2)\}^2(p_{21}\dot{y}_1 + p_{22}\dot{y}_2)$$

$$= C^2p_{21}y_1^2\dot{y}_1 + 2CDp_{21}y_1\dot{y}_1y_2 + D^2p_{21}\dot{y}_1y_2^2 + C^2p_{22}y_1^2\dot{y}_2 + 2CDp_{22}y_1y_2\dot{y}_2 + D^2p_{22}\dot{y}_2y_2^2 \quad (8a)$$

$$A = (1 + \gamma)p_{11} + \gamma p_{21}, \tilde{B} = (1 + \gamma)p_{12} + \gamma p_{22}$$

$$C = (1 + \gamma)p_{21} + \gamma p_{11}, D = (1 + \gamma)p_{22} + \gamma p_{12} \quad (8b)$$

式 (7a) が平均化法を適用する基礎方程式となる。

平均化法では、まず最初に式 (7a) において $\varepsilon = 0$ のときを仮定する。すると、その解は一般性を失うことなく $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$ として $y_i = \rho_i \sin(\Omega_i t + \theta_i), \dot{y}_i = \rho_i \Omega_i \cos(\Omega_i t + \theta_i), i = 1, 2$ と容易に求められる。次に $\varepsilon \neq 0$ の場合には、 ρ_i, θ_i を時間の関数として計算すると、式 (7a) は次のような y の微分方程式から ρ, θ に関する微分方程式に変換される。

$$\dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{\Omega_i} f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \cos(\Omega_i t + \theta_i)$$

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\varepsilon}{\Omega_i \rho_i} f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \sin(\Omega_i t + \theta_i)$$

$$i = 1, 2 \quad (9)$$

平均化法の理論より、十分小さい ε に対して、式 (9) は右辺を時間で平均化した式で十分よく近似できることが知られている [8], [9]。

$$\dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{\Omega_i} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \cos(\Omega_i t + \theta_i) dt$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{-\varepsilon}{\Omega_i \rho_i} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \sin(\Omega_i t + \theta_i) dt$$

$$i = 1, 2 \quad (10)$$

Ω_1, Ω_2 が $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$ かつ $\Omega_2/\Omega_1 \neq 3$ であると仮定すると式 (10) は次のように計算される (付録 1.)。

$$\dot{\rho}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\rho_1 \left(1 - \frac{1}{4}E\rho_1^2 - \frac{1}{2}F\rho_2^2\right), \dot{\theta}_1 = 0$$

$$\dot{\rho}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\rho_2 \left(1 - \frac{1}{2}G\rho_1^2 - \frac{1}{4}H\rho_2^2\right), \dot{\theta}_2 = 0 \quad (11a)$$

ここにおいて

$$E = A^2p_{11}q_{11} + C^2p_{21}q_{12}$$

$$F = \tilde{B}^2p_{11}q_{11} + D^2p_{21}q_{12}$$

$$G = A^2p_{12}q_{21} + C^2p_{22}q_{22}$$

$$H = \tilde{B}^2p_{12}q_{21} + D^2p_{22}q_{22} \quad (11b)$$

とする。 Ω_1 と Ω_2 が $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$ かつ $\Omega_2/\Omega_1 \neq 3$ であれば $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ となり θ_1 と θ_2 は任意の定数となるので、振幅に関する方程式のみを解析すればよい。そこで、新しい変数 $U_1 \equiv \rho_1^2 \geq 0, U_2 \equiv \rho_2^2 \geq 0$ を導入すると式 (11a) は以下のように簡単化される。

$$\dot{U}_1 = \varepsilon U_1 \left(1 - \frac{1}{4}EU_1 - \frac{1}{2}FU_2\right) \equiv \varepsilon h_1(U_1, U_2)$$

$$\dot{U}_2 = \varepsilon U_2 \left(1 - \frac{1}{2}GU_1 - \frac{1}{4}HU_2\right) \equiv \varepsilon h_2(U_1, U_2) \quad (12)$$

3. 平均化法による平衡点の解析

3.1 平衡点の安定性

安定な定常解は式 (12) から求められる安定平衡点に相当する。式 (12) において $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 0$ とおくと平衡点 (U_{01}, U_{02}) が得られる。すなわち、この系には零解 ($\varepsilon > 0$ のとき不安定であることは自明) のほかに三つの平衡点 (a) $U_{01} \neq 0, U_{02} = 0$, (b) $U_{01} = 0, U_{02} \neq 0$, (c) $U_{01} \neq 0, U_{02} \neq 0$ が存在することが分かる。具体的に三つの平衡点は以下のように表すことができる。

$$(a) U_1 \neq 0, U_2 = 0 \Rightarrow U_{01} = \frac{4}{E}, U_{02} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_{01} = \sqrt{\frac{4}{E}}, \rho_{02} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{4}{E}} \sin(\Omega_1 t + \theta_1), y_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = p_{11}\rho_{01} \sin(\Omega_1 t + \theta_1)$$

$$x_2 = p_{21}\rho_{01} \sin(\Omega_1 t + \theta_1) \quad (13a)$$

$$(b) U_1 = 0, U_2 \neq 0 \Rightarrow U_{01} = 0, U_{02} = \frac{4}{H}$$

$$\Rightarrow \rho_{01} = 0, \rho_{02} = \sqrt{\frac{4}{H}}$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = \rho_{02} \sin(\Omega_2 t + \theta_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = p_{12} \rho_{02} \sin(\Omega_2 t + \theta_2)$$

$$x_2 = p_{22} \rho_{02} \sin(\Omega_2 t + \theta_2) \quad (13b)$$

$$(c) U_1 \neq 0, U_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \rho_{01} = \sqrt{\frac{4(-2F+H)}{HE-4GF}}, \rho_{02} = \sqrt{\frac{4(E-2G)}{HE-4GF}}$$

$$x_1 = p_{11} \rho_{01} \sin(\Omega_1 t + \theta_1)$$

$$+ p_{12} \rho_{02} \sin(\Omega_2 t + \theta_2)$$

$$x_2 = p_{21} \rho_{01} \sin(\Omega_1 t + \theta_1)$$

$$+ p_{22} \rho_{02} \sin(\Omega_2 t + \theta_2) \quad (13c)$$

ここにおいて、式 (13a) で表される解は計算の結果、 p_{11} と p_{21} が異符号となることから x_1 と x_2 が共通の角周波数 Ω_1 をもち、互いに逆位相 (位相差 π) の関係となる解となる。これを逆相 (同期) 解という。また、式 (13b) で表される解は、 p_{12} と p_{22} が同符号となることから x_1 と x_2 が共通の角周波数 Ω_2 をもち、互いに同位相 (位相差 0) の関係となる解となる。これを同相 (同期) 解という。同相解、逆相解ともに $\omega_2/\omega_1 = 1$ の場合以外は x_1 と x_2 の振幅は等しくない。最後に式 (13c) で表される解は x_1 と x_2 に同相成分と逆相成分が同時に現れる二重モード解で、一般にこれは準周期解となる。また式 (13a)~(13c) において θ_1, θ_2 は任意定数である。これらの平衡点の安定性は次のヤコビ行列 \mathbf{J} の固有値から判定できる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial U_1} & \frac{\partial h_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial U_1} & \frac{\partial h_2}{\partial U_2} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{U_1 = U_{01} \\ U_2 = U_{02}}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}EU_{01} - \frac{1}{2}FU_{02} & -\frac{1}{2}FU_{01} \\ -\frac{1}{2}GU_{02} & 1 - \frac{1}{2}GU_{01} - \frac{1}{2}HU_{02} \end{bmatrix} \quad (14)$$

すなわち、 \mathbf{J} のすべての固有値の実部が負であれば平衡点は漸近安定、固有値の一つでも実部が正であれば平衡点是不安定である。また、固有値の一つが (実部) 零となるととき分岐が起こる。

式 (14) に式 (13a), (13b) の各平衡点を代入して固

有値を計算することにより逆相解に対応した平衡点、式 (13a) の安定条件は $1 - 2G/E < 0$ 、同相解に対応した平衡点、式 (13b) の安定条件は $1 - 2F/H < 0$ となる。更に同相解に対応した平衡点、式 (13b) は $1 - 2F/H = 0$ でスーパークリティカルな熊手型分岐を起こし不安定化し、二重モード解に対応した安定な平衡点、式 (13c) が発生する。また、逆相解に対応した平衡点、式 (13a) は $1 - 2G/E = 0$ でサブクリティカルな熊手型分岐を起こし不安定化し、式 (13c) で与えられる二重モード解に対応した不安定な平衡点が発生する。以上の具体例については 4.3 で述べる。

4. 平衡点の計算

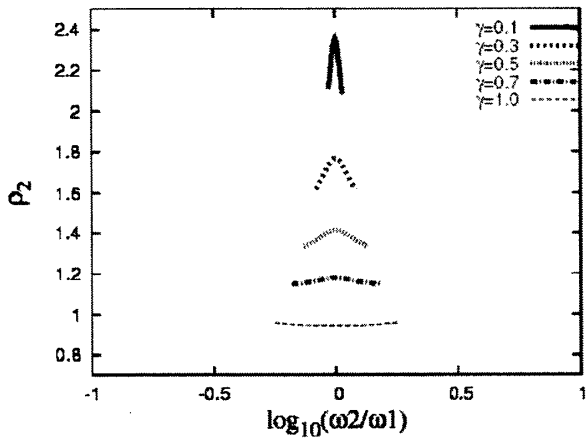
以上より、二つの van der Pol 発振器を式 (4) のように非線形結合した系が弱非線形の場合の平衡点の特徴とそれらが安定に存在する範囲を具体的に示す。具体的な計算手順は次のようになる。まず、パラメータ $\gamma, \omega_2/\omega_1$ を定め、 \mathbf{B} の固有値 Ω_1^2 と Ω_2^2 を数値的に求める。更に対応する単位長に正規化された固有ベクトル \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 を求める。これらをもとに式 (8b) の $A \sim D$ 、更に式 (11b) の $E \sim H$ を求め、式 (13) の各解を定め、式 (14) よりその安定性を判別する。

本論文の計算結果では、非線形性の強さを表す ε は 0.1、 ω_2/ω_1 の値を 0.01 から 100 まで変化させ同期特性を調べている。また、次のような線形結合を考え、非線形結合の場合と比較している。

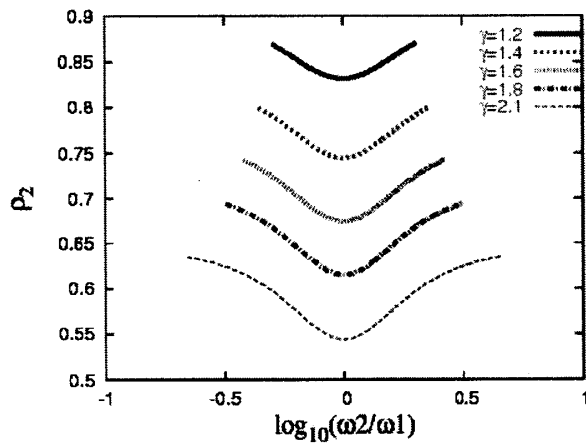
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (1 + \gamma)x_1 + \gamma x_2 &= \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 + \gamma \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_1 + (1 + \gamma) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2 &= \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

4.1 同相解の場合

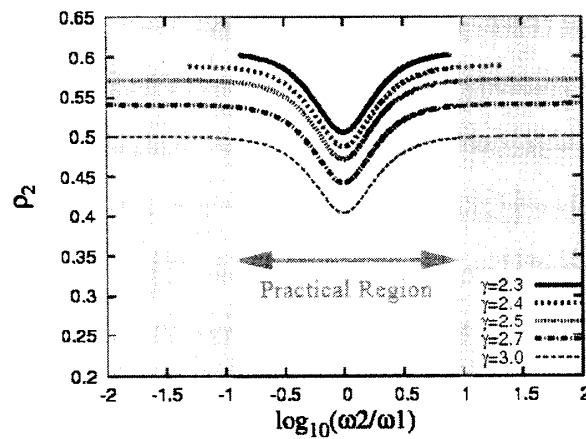
まず最初に同相解についての計算結果を示す。同相解は粘菌との関係において最も重要で、実際 ε がある程度以上に大きくなると逆相解は不安定化し、同期する場合には必ず同相解となる。図 1 は様々な結合係数 γ において、横軸を $\log_{10}(\omega_2/\omega_1)$ 、縦軸を y 領域での定常振幅 $\rho_2 (= \rho_{02})$ で描いたものである。すなわち、それぞれの曲線の端が同期の限界点を表している。このシステムでは、結合係数 γ が大きくなるほど同期範囲は広がる。図 1 に表記されている “Practical Region” は $0.12 \leq \omega_2/\omega_1 \leq 9.14$ で、これより外の範囲では同期したときの二つの発振器の振幅の比が 100 倍以上になり、現実的ではなくなるので省略した。



(1) $0.1 \leq \gamma \leq 1.0$



(2) $1.2 \leq \gamma \leq 2.1$

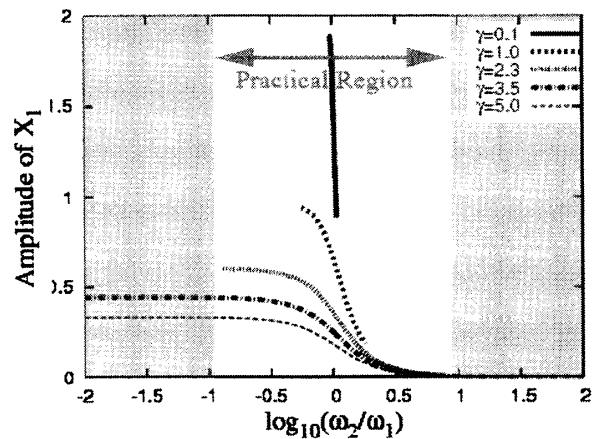


(3) $2.3 \leq \gamma \leq 3.0$

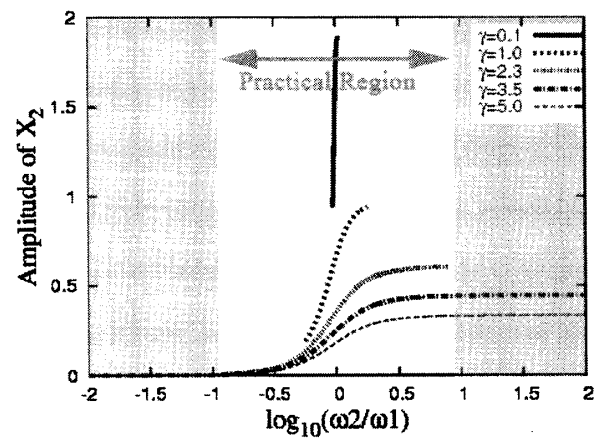
図1 非線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における同相同期解の同期特性

Fig.1 Synchronization characteristics of the same-phase solution for various values of coupling factor γ for nonlinear coupling.

図2に示されるように二つの発振器の角周波数の比 ω_2/ω_1 が1から離れていると、低い角周波数をもつ発振器の振幅は抑圧される。また、同期時の同相解の角周波数 Ω_2 を図3に示す。角周波数 Ω_2 は ω_2/ω_1 よ



(a) x_1



(b) x_2

図2 非線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における同相同期解の振幅特性

Fig.2 Amplitude characteristics of the same-phase solution for various values of γ for nonlinear coupling.

りも大きい。例えば $\gamma = 5.0, \omega_2/\omega_1 = 5.0$ の場合には、 $\Omega_2 = 12.41$ となる。同期曲線上のいくつかのポイントについてコンピュータシミュレーションと照合した結果、いずれもよく一致した。一例として図4に $\epsilon = 0.1, \gamma = 5.0, \omega_2/\omega_1 = 5.0$ の場合の式(4)のコンピュータシミュレーションの結果を示す。これより x_1 の振幅は 0.010, x_2 の振幅は 0.325, 角周波数 Ω_2 は 12.417 となり、対応する平均化法の結果は x_1 の振幅は 0.011, x_2 の振幅は 0.326, 角周波数 Ω_2 は 12.418 となり、両者はよく一致している^(注2)。

ところで、図1(c)から結合係数 γ の値が2.4と2.5の間で急激に同期範囲が広がっていることが確認でき

(注2) : $\gamma = 0.1$ の場合は $\epsilon = 0.1$ では(注1)で述べた理由により同期限界付近で同相同期から多少位相誤差が発生するが $\epsilon = 0.01$ とすればほとんど位相誤差は発生しない。逆相同期解についても同様のことが起こる。

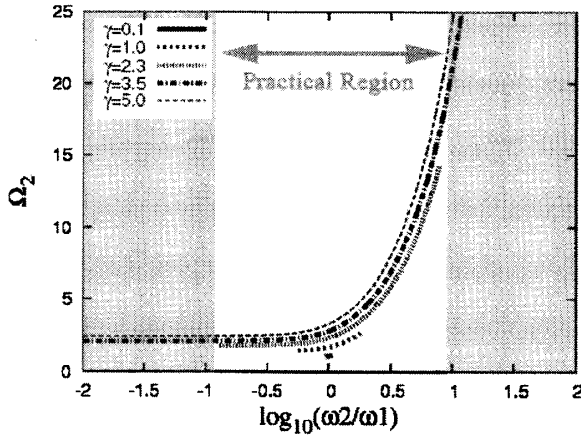


図3 非線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における同相同期解の同期角周波数特性

Fig.3 Synchronized angular frequency characteristics of the same-phase solution for various values of γ for nonlinear coupling.

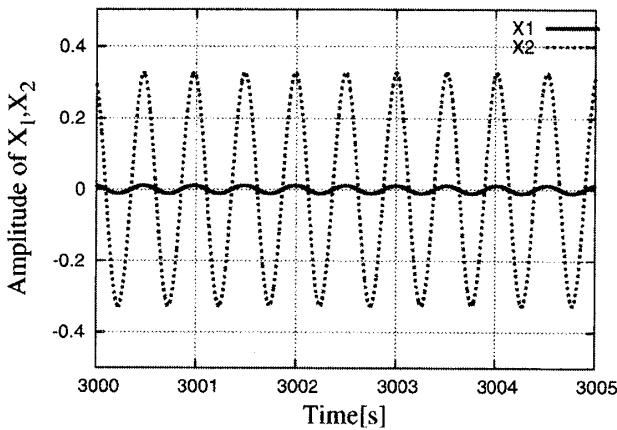


図4 非線形結合の場合の、同相同期のコンピュータシミュレーション ($\varepsilon = 0.1, \gamma = 5.0, \omega_2/\omega_1 = 5.0$, 初期値 $(x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)) = (2, 0, 2, 0)$)

Fig.4 Computer simulation for the same-phase synchronization for nonlinear coupling ($\varepsilon = 0.1, \gamma = 5.0, \omega_2/\omega_1 = 5.0$, initial condition: $(x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)) = (2, 0, 2, 0)$).

る。以下、この理由について明らかにする。図5は非線形結合時の同相解(逆相解)の分岐集合 $1 - 2F/H = 0$ ($1 - 2G/E = 0$) を γ 対 ω_2/ω_1 平面^(注3)に描いたものである。各曲線の右側または上側の領域が安定領域である。特に同相解の分岐集合は $\omega_2/\omega_1 \rightarrow 0$ のとき $\gamma \rightarrow 1 + \sqrt{2}$ となる(付録2)。したがって ω_1 と ω_2 の角周波数が無限に離れていても $\gamma > 1 + \sqrt{2} \doteq 2.414$ であれば同相同期が達成されることになり上の事実が理論的に裏づけられる。

次に比較のため、式(15)の線形結合の場合の同相解の同期範囲について述べる。図6は式(15)のように線形結合したときに平均化法により求められた同期

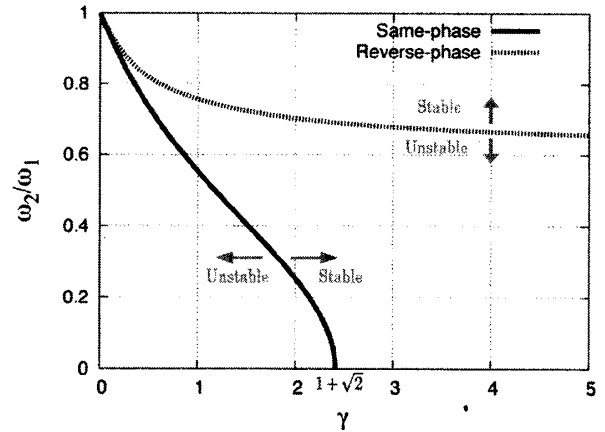


図5 非線形結合時の同相解と逆相解の分岐曲線

Fig.5 Bifurcation curves of the same-phase and the reverse-phase solutions for nonlinear coupling.

表1 線形結合と非線形結合の場合の同相解及び逆相解の結合係数 γ と同期範囲の関係

Table 1 Variation of synchronization range for linear and nonlinear coupling case.

(a) Same-phase solution

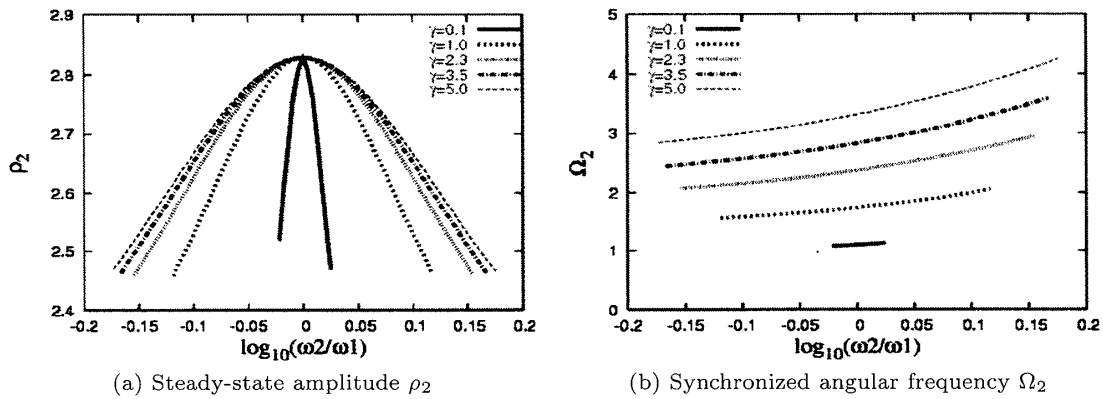
γ	ω_2/ω_1	
	Nonlinear Coupling	Linear Coupling
0.1	0.94 ~ 1.07	0.95 ~ 1.06
1.0	0.56 ~ 1.80	0.76 ~ 1.32
2.3	0.13 ~ 7.83	0.70 ~ 1.44
5.0	smaller than 0.01 ~ greater than 100	0.66 ~ 1.52

(b) Reverse-phase solution

γ	ω_2/ω_1	
	Nonlinear Coupling	Linear Coupling
0.1	0.95 ~ 1.06	0.94 ~ 1.07
1.0	0.76 ~ 1.32	0.56 ~ 1.80
2.3	0.70 ~ 1.44	0.13 ~ 7.83
5.0	0.66 ~ 1.52	smaller than 0.01 ~ greater than 100

特性を示す。具体的には、式(11b)の E, F, G, H の γ を零にし、式(8b)の γ を変化させることにより求める。線形結合の場合には、表1に見られるように $0.1 \leq \gamma \leq 5$ において非線形結合の場合と比べて同期範囲がかなり狭いことが分かる。

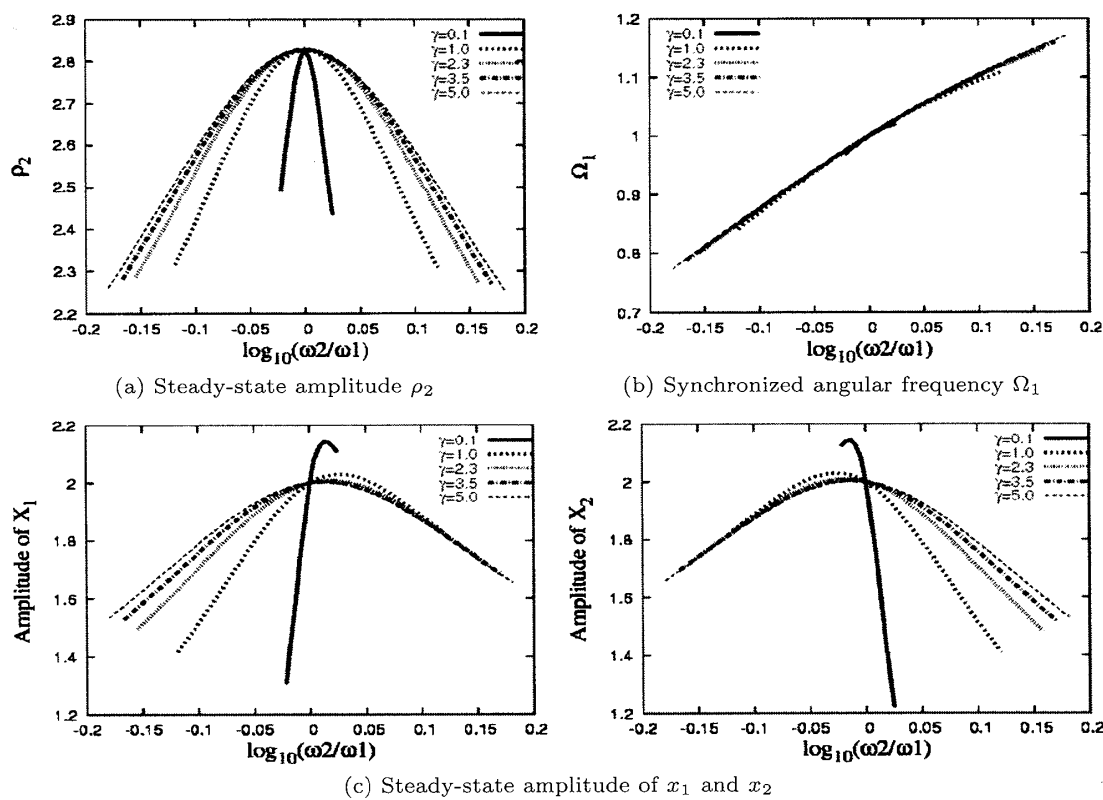
(注3) : $0 \leq \omega_2/\omega_1 \leq 1$ として一般性を失わない。



(a) Steady-state amplitude ρ_2 (b) Synchronized angular frequency Ω_2

図 6 線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における同相同期特性

Fig. 6 Synchronization characteristics of the same-phase solution for linear coupling.



(a) Steady-state amplitude ρ_2 (b) Synchronized angular frequency Ω_1

(c) Steady-state amplitude of x_1 and x_2

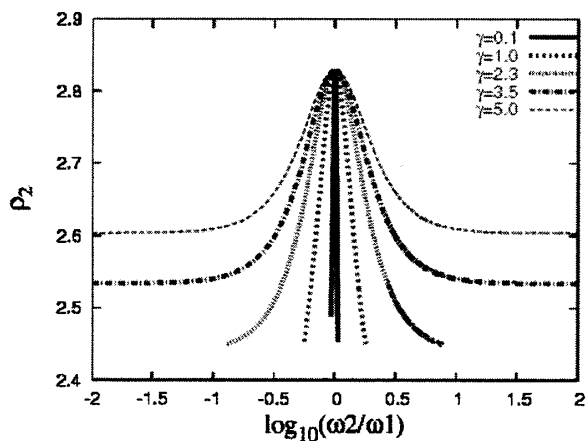
図 7 非線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における逆相同期特性

Fig. 7 Synchronized characteristics of the reverse-phase solution for nonlinear coupling.

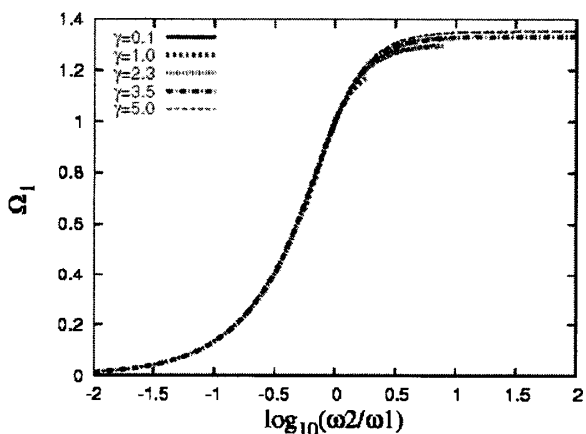
4.2 逆相解の場合

次に逆相解についての計算結果を示す。逆相解は ε を大きくすると不安定化し、粘菌結合系のダイナミクスとの関連性は薄いが、方程式 (3) がもつ一つのダイナミクスという意味で述べる。図 7 に非線形結合をしたときの、図 8 に線形結合をしたときの逆相解の同期範囲と同期特性を示す。同相解の場合の特性とは対称的に、非線形結合の場合に逆相解の同期範囲は狭く、線形結合の場合には広い。表 1 より非線形結合の

場合の同相解（逆相解）の同期範囲と線形結合の場合の逆相解（同相解）の同期範囲は一致している。これはそれぞれの解のヤコビ行列の固有値の関係から一般的に証明することができるが、紙面の都合上ここでは省略する。図 7(c) より二つの発振器の角周波数の比 ω_2/ω_1 が 1 から離れていると、低い角周波数をもつ発振器の振幅は抑圧されることが分かるが、同相解の計算結果と比較すると、その抑圧の度合はさほど大きくない。また、図 7(b)、図 8(b) より、逆相に同期した



(a) Steady-state amplitude ρ_2



(b) Synchronized angular frequency Ω_1

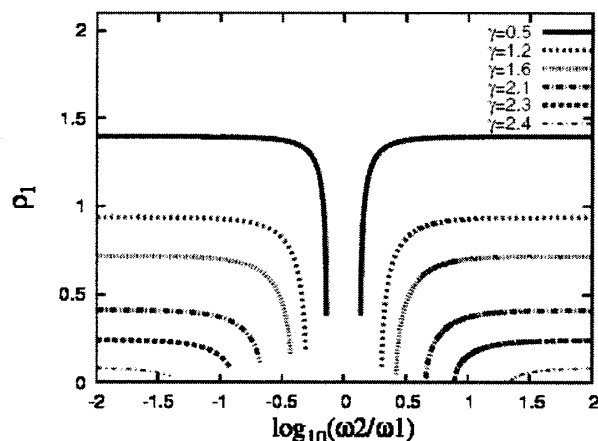
図8 線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における逆相同期特性

Fig.8 Synchronization characteristics of reverse-phase solution for linear coupling.

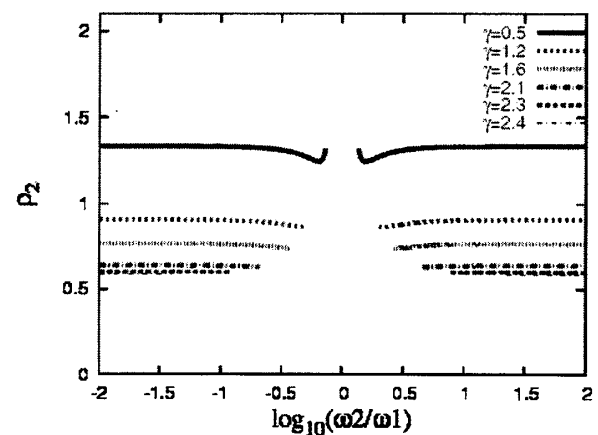
ときの角周波数 Ω_1 は結合係数 γ の値にあまり依存しない。非線形結合の場合、逆相解の同期範囲は図5より、 $\gamma \doteq 4.65$ のとき $\omega_2/\omega_1 = 0.66$ (更に $\gamma \doteq 111.85$ のとき $\omega_2/\omega_1 = 0.62$) となり漸近値が存在するようである。すなわち、同相解のように γ の増大とともに極端に同期範囲が増大する傾向は現れない。

4.3 二重モード解の場合

最後に二重モード解についての計算結果を示す。図9は非線形結合したときの、様々な結合係数 γ における、横軸を $\log_{10}(\omega_2/\omega_1)$ 、縦軸を y 領域での定常振幅 $\rho_1 (= \rho_{01})$ と $\rho_2 (= \rho_{02})$ として特性を描いたものである。二重モード解が安定に存在する範囲は、同相解が安定に存在しない範囲となる。すなわち、同相同期が不安定となる場合には、二重モード解が観測される。したがって、安定な同相解がすべての ω_2/ω_1 に対して存在している $\gamma \geq 1 + \sqrt{2}$ では、二重モード解は存在しない。また、線形結合の場合には逆相解が不安定と



(a) ρ_1



(b) ρ_2

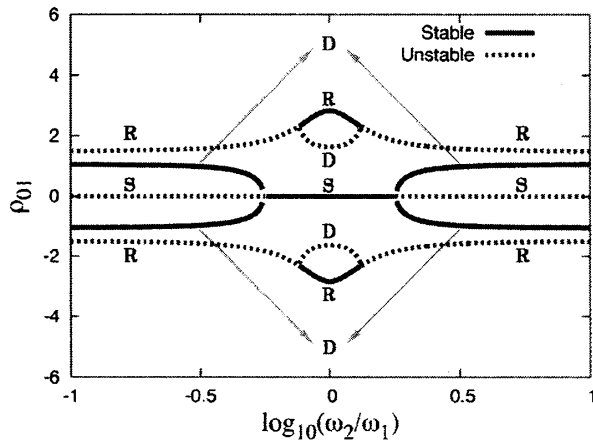
図9 非線形結合の場合の、様々な結合係数 γ における二重モード解の振幅特性

Fig.9 Amplitude characteristics of ρ_1 and ρ_2 of the double-mode solution for various values of coupling factor γ for nonlinear coupling.

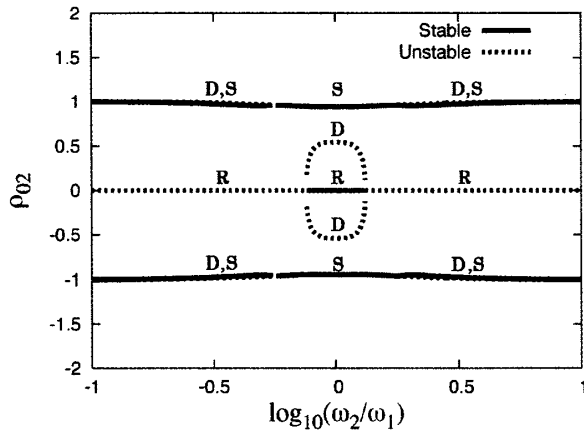
なる領域で二重モード解が安定に存在する。

非線形結合の場合の二重モード解の特性は3.1で述べた同相解、逆相解の熊手型分岐より説明され、式(13a)~(13c)などより各平衡点とその安定性を具体的に求めると、例えば $\gamma = 1.0$ の場合、図10のようになる。 $\gamma \neq 1$ の場合も $\gamma < 1 + \sqrt{2}$ では定性的には同様の特性が得られる。 $\gamma \geq 1 + \sqrt{2}$ では、同相解の熊手型分岐点が無限遠に移動するため二重モード解は現れない。図10より確かに同相解の分岐点ではスーパークリティカルな、また逆相解の分岐点ではサブクリティカルな熊手型分岐が起こっていることが確認される^(注4)。

(注4): 図10(b)のD,Sと表示されている部分は、不安定な同相解(S)と安定な二重モード解(D)がほぼ重なっている。また、 U_{01} , U_{02} でなく ρ_{01} , ρ_{02} を用いたのは負の部分も表示するためである。



(a) ρ_{01} versus $\log_{10}(\omega_2/\omega_1)$



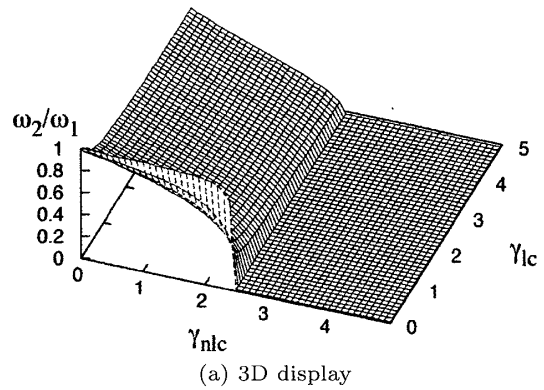
(b) ρ_{02} versus $\log_{10}(\omega_2/\omega_1)$

図 10 非線形結合の場合の $\gamma = 1.0$ における各解とその安定性 (S: 同相解, R: 逆相解, D: 二重モード解, 実線: 安定解, 点線: 不安定解)

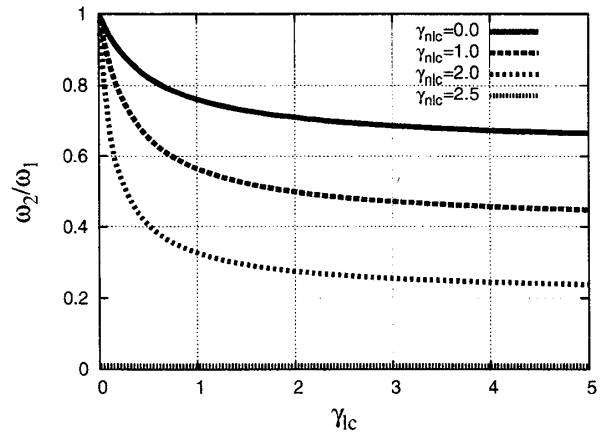
Fig. 10 Each solution and its stability for $\gamma = 1.0$ for nonlinear coupling. (S: same-phase solution R: reverse-phase solution D: double-mode solution Solid curves: stable solution Dotted curves: unstable solution).

4.4 線形結合項と非線形結合項の役割

式 (4) において線形結合項と非線形結合項を分けて, どちらの項が同期範囲により強い影響を与えているかを考察する. 式 (5b) において行列 \mathbf{B} 中の γ を γ_{lc} (線形結合項), 関数 $g_1(x, \dot{x}), g_2(x, \dot{x})$ 中の γ を γ_{nlc} (非線形結合項) と置き直し, 平均化による解析を行うと, 例えば同相解の場合, 同期特性は図 11 のようになる. ここにおいて, 縦軸は同期限界における $\omega_2/\omega_1 (\leq 1)$ を表す. 図 11 (b) より γ_{lc} を固定し γ_{nlc} を 0 から次第に大きくしていったとき, ω_2/ω_1 は小さくなり, $\gamma_{nlc} = 1 + \sqrt{2}$ 付近で急激に零に近づく. これは図 1 (c) において $\gamma = 2.5$ となると同相解の同期範囲が無限大となることと同じことを意味する. また γ_{nlc} が一定の各曲線を見ると γ_{lc} が大きくなっても



(a) 3D display



(b) γ_{lc} versus ω_2/ω_1

図 11 非線形結合時に結合係数を γ_{lc} (線形結合項) と γ_{nlc} (非線形結合項) に分割した場合の同相解の同期範囲

Fig. 11 Synchronization range of the same-phase solution when γ is divided into γ_{lc} (linear coupling term) and γ_{nlc} (nonlinear coupling term) for nonlinear coupling case.

ω_2/ω_1 はほとんど減少しない. 以上の結果より, 線形結合の役割は振動子の内部ダイナミクスを変えないような方法での同期の実現に寄与しており, γ_{lc} が小さいところを除き, γ_{lc} を大きくしてもあまり同期範囲は広がらない. 一方, 非線形結合の役割は振動子の内部ダイナミクスを変えるような方法での同期の実現に寄与しており, γ_{nlc} を大きくするとかなり同期範囲は拡大する. 特に $\gamma_{nlc} > 1 + \sqrt{2}$ となると無限大となることが分かる.

5. むすび

二つの van der Pol 発振器を非線形結合させた系に対して, 弱非線形系を仮定して平均化法により解析し, 同相解, 逆相解の同期特性及び二重モード解の特性が解析的に求められることを明らかにした. また, 式 (15) に示す線形結合を仮定し, 非線形結合の場合と対比して, 各解の同期特性を比較した. 非線形結合の場合

合、同相解は非常に広い同期範囲を示す。特に、結合係数 γ の値が $1 + \sqrt{2}$ 以上となると同期範囲が無限大となる。同期した際、自然角周波数が低い発振器の振幅が大きく抑圧されることや、同期したときの角周波数が各々の発振器の角周波数と異なる高い値を示すなどの特徴が得られた。また、同相解の場合の特性とは対照的に、線形結合のときに逆相解は非常に広い同期範囲を示した。

一般に非線形結合系においては、同相に同期がとれた場合、 x_1, x_2 の振幅は無結合時に比べて小さくなる。これは細胞生物学の立場から見て合理的な結果である。すなわち、多数がリズムを合わせられる（同期する）ということは、受ける負荷を皆で分散できることを意味し、このためそれぞれの振幅は小さくなる。この際、低い振動数のものの貢献度は、高い振動数のものの貢献度より低いため振幅が小さくなる。

これらの平均化法の計算結果は、この系をコンピュータシミュレーションで解いたものと、数値積分法の計算誤差が出る同期の限界付近を除いては十分よく合致し、十分な精度をもつことも確かめられた。今後の課題として、非線形結合が同相解の同期範囲を格段に広げるメカニズムの解明、同じシステムで多数の発振器結合系を解析する、この結合系の具体的な回路の実装、更には粘菌の実際のダイナミクスとの対比などが挙げられる。

謝辞 本研究を進めるにあたり有意義な議論、コメントを頂いた長野正道教授（立命館大学）に感謝致します。

文 献

- [1] 末崎輝雄, 森 真作, “二つの発振器の相互同期,” 信学誌, vol.48, no.9, pp.1551-1557, Sept. 1965.
- [2] T. Endo and S. Mori, “Mode analysis of a multi-mode ladder oscillator,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-23, no.2, pp.100-113, 1976.
- [3] R.H. Rand and P.J. Holmes, “Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators,” Int. J. Nonlinear Mechanics, vol.15, pp.387-399, 1980.
- [4] H. Kitajima, Y. Noumi, T. Kousaka, and H. Kawakami, “Forced synchronization of coupled oscillators,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E82-A, no.4, pp.700-703, April 1999.
- [5] S. Nagano, “Receptor-product coupling scheme for synchronization,” Prog. Theor. Phys., vol.103, no.2, pp.229-244, 2000.
- [6] S. Nagano, “Biological receptor scheme for robust synchronization of limit cycle oscillators,” Prog.

Theor. Phys., vol.107, no.5, pp.861-877, 2002.

- [7] 長野正道, “粘菌が教える新しいリズム同期化法,” 日本物理学会誌, vol.57, no.11, pp.826-830, 2002.
- [8] L.O. Chua and T. Endo, “Multimode oscillator analysis via integral manifolds, Part I: Non-resonant case,” Int. J. Circuit Theory Appl., vol.16, pp.25-58, 1988.
- [9] 遠藤哲郎, 非線形回路, コロナ社, 2004.

付 録

1. 平均化方程式 (11a) の導出

式 (7), (8) より $f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$, $i = 1, 2$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \dot{y}_i - q_{i1}g_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - q_{i2}g_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ &= \dot{y}_i - E_i y_1^2 \dot{y}_1 - 2F_i y_1 \dot{y}_1 y_2 - G_i \dot{y}_1 y_2^2 \\ &\quad - H_i y_1^2 \dot{y}_2 - 2I_i y_1 y_2 \dot{y}_2 - J_i y_2^2 \dot{y}_2 \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ここにおいて、 $E_i \sim J_i$ は $A \sim D, p_{ij}, q_{ij}, \gamma$ の関数であるが、紙面の都合上、必要なもののみ本文式 (11b) に記す。式 (11b) では、以下の計算において $E_1 \equiv E$, $G_1 \equiv F$, $H_2 \equiv G$, $J_2 \equiv H$ としている。

式 (10) の $\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2$ は上式から以下のように展開される ($\psi_i \equiv \Omega_i t + \theta_i$)。

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\varepsilon}{\Omega_1} \{ \rho_1 \Omega_1 \langle \cos^2 \psi_1 \rangle \\ &\quad - E_1 \rho_1^3 \Omega_1 \langle \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_1 \rangle \\ &\quad - 2F_1 \rho_1^2 \rho_2 \Omega_1 \langle \sin \psi_1 \cos^2 \psi_1 \sin \psi_2 \rangle \\ &\quad - G_1 \rho_1 \rho_2^2 \Omega_1 \langle \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \rangle \\ &\quad - H_1 \rho_1^2 \rho_2 \Omega_2 \langle \sin^2 \psi_1 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \rangle \\ &\quad - 2I_1 \rho_1 \rho_2^2 \Omega_2 \langle \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \rangle \\ &\quad - J_1 \rho_2^3 \Omega_2 \langle \sin^2 \psi_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \rangle \} \quad (\text{A}\cdot 2\text{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= \frac{\varepsilon}{\Omega_2} \{ \rho_2 \Omega_2 \langle \cos^2 \psi_2 \rangle \\ &\quad - E_2 \rho_1^3 \Omega_1 \langle \sin^2 \psi_1 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \rangle \\ &\quad - F_2 \rho_1^2 \rho_2 \Omega_1 \langle \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_2 \rangle \\ &\quad - G_2 \rho_1 \rho_2^2 \Omega_1 \langle \cos \psi_1 \sin^2 \psi_2 \cos \psi_2 \rangle \\ &\quad - H_2 \rho_1^2 \rho_2 \Omega_2 \langle \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \rangle \\ &\quad - I_2 \rho_1 \rho_2^2 \Omega_2 \langle \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos^2 \psi_2 \rangle \\ &\quad - J_2 \rho_2^3 \Omega_2 \langle \sin^2 \psi_2 \cos^2 \psi_2 \rangle \} \quad (\text{A}\cdot 2\text{b}) \end{aligned}$$

ここにおいて、 $\langle \cdot \rangle$ は括弧内の時間関数の無限時間にわたる平均を示す。紙面の都合上、 $\theta_i, i = 1, 2$ についての計算は省略するが、同様に計算される。

式 (A・2a), (A・2b) に現れる各項の時間平均は, $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$ の前提条件を考慮すると $\Omega_2/\Omega_1 \neq 3$ の条件があれば $\langle \cos^2 \psi_1 \rangle = 1/2$, $\langle \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_1 \rangle = 1/8$, $\langle \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \rangle = \langle \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \rangle = 1/4$ となり, その他の項はすべて零となるので, 式 (11a) のように $\dot{\rho}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\theta}_2$ が計算できる.

2. 角周波数比が無限大の場合の同相解に対応する平衡点の分岐値 γ

図 5 において二つの発振器の角周波数が無限に離れている $\omega_2/\omega_1 = 0$ の場合を仮定すると, 式 (7b) の長さ 1 に正規化された固有ベクトル \mathbf{P} とその逆行列 \mathbf{P}^{-1} はそれぞれ以下のように書ける.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{\sqrt{2\gamma^2 + 2\gamma + 1}} & 1 \\ \frac{1 + \gamma}{\sqrt{2\gamma^2 + 2\gamma + 1}} & 0 \end{bmatrix}$$

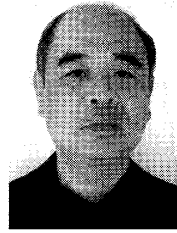
$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2\gamma^2 + 2\gamma + 1}}{1 + \gamma} \\ 1 & \frac{\gamma}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

式 (13b), (14) より同相解の分岐条件は $1 - 2F/H = 0$ であるので, 式 (11b) で定義した F, H に上式 (A・3) の各要素を代入すると, 次のような結合係数 γ に関する二次方程式が書ける.

$$\gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0 \quad (\text{A} \cdot 4)$$

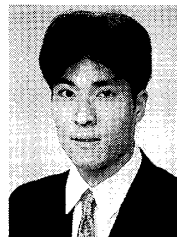
よって, $\gamma > 0$ の条件を考慮すると図 5 において同相解の分岐曲線が $\omega_2/\omega_1 = 0$ の場合の結合係数 γ の値は $1 + \sqrt{2}$ である.

(平成 18 年 5 月 8 日受付, 8 月 10 日再受付,
10 月 2 日最終原稿受付)



遠藤 哲郎 (正員:フェロー)

1972 慶大・工・電気卒. 1977 同大大学院博士課程了. 同年, 防大・電気・助手. 同講師, 助教授を経て, 1992 明大・理工・電子通信教授. この間, 発振器, PLL, カオスなどの非線形振動の研究に従事. 1986 から 1989 まで本会非線形問題研究会幹事. 1990 から 1994 まで本会基礎境界グループ論文誌編集委員. 1996 本会非線形問題研究会副委員長. 1997 同委員長. 1995 から 1997 まで, IEEE Circuits & Systems 誌アソシエイトエディタ. 2006 から本会基礎境界ソサイエティ副会長 (非線形理論とその応用). IEEE, 電気学会各会員.



田中 久陽 (正員)

1995 早大大学院博士課程了. 工博. 同年より, 日本学術振興会特別研究員 (PD). 1996 カリフォルニア大バークレイ校客員研究員. 1997 よりソニーコンピュータサイエンス研究所研究員. 2001 電気通信大学電気通信学部電子工学科助教授. 通信システム, 数理生物学, 非線形物理等の横断的分野の研究に従事. 日本物理学会, 情報処理学会, IEEE 各会員.



清水 邦康 (学生員)

2001 明大・理工・電子通信卒. 2005 同大大学院理工学研究科電気修士課程了. 現在, 同大大学院理工学研究科博士後期課程在学中. 主として非線形振動, 同期現象に関する研究に従事.