

論文

同期現象の解析に必要な位相方程式の導出アルゴリズムに関する 比較検討

太田 大輔[†] 田中 久陽[†] 毎野 裕亮[†]

Two Computational Algorithms for Deriving Phase Equations: Equivalence and Some Cautions

Daisuke OHTA[†], Hisa-Aki TANAKA[†], and Yusuke MAINO[†]

あらまし 同期現象を解析する際に、位相方程式はしばしば定性的、定量的両側面で有益な情報を与えることが知られている [1]。本論文は、必ずしもその方程式が明示的に与えられていない場合を含む現実的なシステムを対象にし、位相方程式の導出アルゴリズムについて比較検討を行う。すなわち、従来知られている二つの異なるアルゴリズム [1], [4] に対し両者の等価性を明らかにし、更に具体的な対象を例に両者を用いる際の利点と注意点をそれぞれ明らかにする。

キーワード 同期引込現象, 位相方程式, コンピュータシミュレーション, 縮約計算アルゴリズム

1. まえがき

大規模かつ複雑なシステムを解析するために、様々な分野においてコンピュータシミュレーションは必須の手段になっている。例えば SPICE や NEURON のようなシミュレータはますます精密化され、多くのユーザに用いられている。ところが、このようなシミュレーションにより得られるデータから即座にシステムの動作機構を理解することが容易でないことが多くなってきている。その理由は、シミュレーションモデル自体が複雑になりすぎたため、動作の全体像を把握することが困難になっているからである。以上のような状況は、非線形システムの発振現象、更に同期引込現象を解析する際にも見られる。ところが、この同期引込現象に対しては、対象が複雑である場合でも、発振の「位相」に注目することにより、システムの動作を見通しよく把握できる場合のあることが知られている [1]。その適用例として例えば [2] においては、神経系の強非線形方程式に対して動的縮約の計算を直接数値的に実行しその位相方程式が導出される例を見ることができる。

この直接的な縮約計算アルゴリズム（以下では随伴固有関数法と呼ぶことにする）においては、システム方程式が明示的に与えられていることが前提である。したがって次章で説明するように、システムが大規模かつ強非線形となるにつれ、その計算上の前処理等が厄介となることが避けられない。そのため、このアルゴリズムの適用された例はこれまでに比較的簡単なシステムや解析的な扱いが可能な場合に限られている。

以上のアルゴリズムにおいて随伴固有関数は随伴変分方程式のもつ周期解により与えられるものである（付録を参照のこと）。一方、システムに微小なインパルス入力を与えたときにある種の応答関数が得られるが、これが上記の固有関数の近似となることが [3] において指摘されている。この性質を利用すると、上記の直接的な縮約計算に対し間接的な縮約計算が可能となる場合がある。この間接的縮約アルゴリズム（インパルス応答関数法と呼ぶことにする）においては、システムの方程式が必ずしも方程式の形で明示的に与えられている必要はなく、実験系にも適用の可能性がある点も魅力的である [4]。

位相方程式に関するこれまでの研究は多数存在している。ところが、上記のインパルス応答関数法に関する文献は我々の知る限りではあるが、あまり多くないようである。例えば [3] では上記のように微小インパ

[†] 電気通信大学電気通信学部電子工学科, 調布市
Department of Electronic Engineering, The University of
Electro-Communications (UEC), Chofu-shi, 182-8585 Japan

ルス入力の応答と随伴固有関数の一致を数値的に示しているが ([3] の Appendix B を参照), そこでの位相方程式の縮約方法はあくまでも随伴固有関数法によるものである. 一方, [5] では随伴固有関数 ([5] では response function と呼んでいる) を微小インパルス入力の応答として解析的に導いている. ところが [5] においては, システムははじめから極座標表示されていることが必要であり, 必ずしも簡単な極座標表示で与えられていない現実のシステムは対象外である. また [6] は周期的インパルス入力に対する応答を扱っており, ここで考える随伴固有関数を単一インパルス入力から求める問題とは別の問題である.

以上を要するに, 現時点でインパルス応答関数は随伴固有関数の何らかの近似であることが暗黙に認められているにすぎず, インパルス応答関数法についてその正当性や適用限界に関するきちんとした記述が存在していないようである.

以上を背景として, 本論文は, 随伴固有関数法とインパルス応答関数法の等価性を明らかにし, 具体的な対象を例に両者の利点と注意点をそれぞれ明らかにすることを目的とする.

2. 位相方程式の導出アルゴリズム

対象とするシステムは次の微分方程式により与えられるとする.

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \quad (\text{ただし, } X, F(\cdot) \in R^n). \quad (1)$$

ここで, 方程式 (1) の解 $X(t)$ として周期 T のリミットサイクル $\gamma(t)$ を仮定する. このとき, $\gamma(t)$ の周りで定義される変分方程式の随伴の固有関数 $Q(t)$ は次を満たす (非自明な) 周期 T の周期関数で与えられる.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -DF(\gamma(t))^T Q(t). \quad (2)$$

ここで, $DF(\gamma(t))$ は $\gamma(t)$ で評価した F のヤコビ行列であり, A^T は A の転置行列を意味する. ここで, $Q(t)$ は正規化して次を満たすように選ぶことができる.

$$Q(t)^T F(\gamma(t)) \equiv 1. \quad (3)$$

式 (2) は周期解をもつことが保証されるので, 計算の労力は別としてこれを求めることができたとする. 今, ここで式 (1) の右辺に摂動項 $\epsilon P(t)$ (外部入力, あるいは他のリミットサイクルからの影響を与える) が付加されたとする. このとき十分小さい ϵ に対して, こ

の摂動の影響を以上で求めた $Q(t)$ を用いて, 位相に関する時間発展を記述する位相方程式に投影することが可能となる. 具体的には, この摂動項が式 (1) の自然周波数と十分近い周波数をもつ周期関数である場合において, 摂動項と $Q(t)$ の内積を 1 周期にわたり積分することから計算される.

結果として得られる位相方程式は

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \Delta\omega + H(\psi_{ext}(\tau) - \psi(\tau)) \quad (4)$$

により与えられる. ここで $H(\cdot)$ は上記の積分

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{T} \int_0^T Q(t + \tilde{\psi})^T P(t + \tilde{\psi}_{ext}) dt \\ & \equiv H(\psi_{ext}(\tau) - \psi(\tau)) \end{aligned} \quad (5)$$

により与えられ, $\Delta\omega$ は外部入力の角周波数とシステムの自然角周波数の差, ψ, ψ_{ext} はそれぞれ, システム内部の振動位相, 外部入力の振動位相を表しており, $[0, 2\pi]$ の値をとる. $\tilde{\psi}$ と $\tilde{\psi}_{ext}$ はそれぞれ, $[0, T]$ の値をとり, これを正規化したものがそれぞれ ψ, ψ_{ext} である. また τ は et により定められるゆっくりとした時間スケールを表している. これらの式 (4), (5) を導出する具体的な計算過程は 3. において説明される.

2.1 随伴固有関数法における問題点

以上の位相方程式の導出は例えば蔵本による動的縮約の方法 [1] を Fredholm theory [6] を用いて簡潔に記述したものであり, その数値的な計算例は [2] 等に見ることができる. ここで現実的なシステムを対象としたとき問題となるのは, 式 (2) の導出と求解の手間である. ここでのヤコビ行列の導出自体計算労力を要するが, これに加え [2] にも指摘されているように, ヤコビ行列において $\gamma(t)$ や摂動の波形がインパルス的な場合の数値積分計算の誤差が無視できないという問題が生じる. また, 式 (2) の求解の一手法として, [2] における時間反転の工夫を用いる際に解をサーチするために相当の試行錯誤が必要となることがある. このような性質から, 随伴固有関数法を非常に大規模な強非線形系に適用するのは不可能ではないまでも容易でないことが分かる.

2.2 インパルス応答関数法における問題点

一方, インパルス応答関数法は単一インパルスの入力の応答からインパルス応答関数を求め, これと入力波形の内積を 1 周期にわたり積分することで式 (5) の右辺と等価な $H(\cdot)$ を導くものである. 実際には図 1 のようにシステムに, あるタイミングで微小インパルス

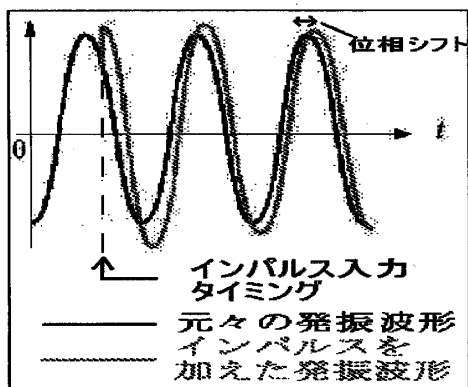


図 1 微小インパルスが入力された後の様子 (インパルス入力のタイミングに依存して位相シフトの量が定まる)

Fig.1 Phase shift after small impulse input. The amount of phase shift is dependent on the impulse input timing.

を入力し、その後の波形とインパルスが入力されていないもとの波形の両者の位相差の定常値を測定する。この操作を波形の1周期の全タイミングに対して求めることによりインパルス応答関数を数値的に求めることが可能である。

このようにして求めたインパルス応答関数を $I(t+\tilde{\psi})$ と表示することにする。ここで、 $I(\cdot) \in R^n$ であり、 I の第 i 成分 I_i は式 (1) に対する摂動 $\epsilon P(t)$ として P の第 i 成分のみにインパルスを与えた際に得られるインパルス応答関数と定義する。このとき、上記の随伴固有関数と同様に

$$\frac{2\pi}{T} \int_0^T I(t+\tilde{\psi})^T P(t+\tilde{\psi}_{ext}) dt \equiv \tilde{H}(\psi_j(\tau) - \psi_i(\tau)) \quad (6)$$

が求まり、これから次の位相方程式

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \Delta\omega + \tilde{H}(\psi_{ext}(\tau) - \psi(\tau)) \quad (7)$$

が得られる。

ここでインパルスは「微小」であることが必要である。これが必ずしも微小でない場合は従来、概日時計等で実験的に求められている PRC (phase response curve) と呼ばれるものにほかならない。また最近の高周波発振器のジッタ解析においても微小インパルス応答関数は有効に利用されており、回路シミュレータと相性が良いといえる [7] ^(注1)。

このように、インパルス応答関数法は工学の現実的な問題を扱う際に利点を有しているが、次のような点が明らかにされていない。すなわち、

(i) インパルス応答関数法が与える結果が随伴固有関数法の結果と等価である保証はあるかという疑問。

(ii) 実際に印加するインパルスの高さ/幅の設定をどのような基準で行うか。また不適切なインパルスを与えた場合にどのような問題が生じるかという適用上の問題点。

2.3 随伴固有関数法とインパルス応答関数法の等価性

ここでまず、上の疑問点について明らかにする。今式 (5) において、システムの次元を最も低い $n = 2$ とし、 Q, P の第 1, 第 2 成分をそれぞれ Q_x, Q_y 及び P_x, P_y とする。すなわち、 $Q^T = [Q_x, Q_y]$, 更に $P^T = [P_x, P_y]$ とする。この仮定は説明の簡単のためで議論の本質を損なわない。このとき、式 (4) は

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} - \Delta\omega = \langle Q_x(t), P_x(t) \rangle \quad (8)$$

と書かれる。ただし、 $\langle f, g \rangle$ は $\langle f, g \rangle = (2\pi/T) \int_0^T f \cdot g dt$ を表している。今周期関数 $P_x(t)$ を幅 Δt のデルタ関数状の関数 $\Delta_i(t)$ を用いて近似的に表示すると、

$$P_x(t) \simeq \sum_{i=1}^N P_x(t_i) \Delta_i(t). \quad (9)$$

ただし、

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} 1 & (t_i \leq t < t_i + \Delta t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで $N = T/\Delta t$ である。したがって式 (8) の右辺において

$$\begin{aligned} \langle Q_x(t), P_x(t) \rangle &= \left\langle Q_x(t), \sum_{i=1}^N P_x(t_i) \Delta_i(t) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle Q_x(t), P_x(t_i) \Delta_i(t) \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

であるので、以上をまとめると、

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} - \Delta\omega = \sum_{i=1}^N P_x(t_i) \langle Q_x(t), \Delta_i(t) \rangle. \quad (12)$$

(注1) : [7] では微小インパルス応答関数を ISF (impulse sensitivity function) と定義している。

今

$$P_x(t) = \begin{cases} \text{微小定数 } C & (t_i \leq t < t_i + \Delta t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (13)$$

とすると、これは $t = t_i$ において幅 Δt の単一の微小インパルスを入力したことにはほかならない。その結果引き起こされる微小位相シフト $\Delta\psi$ は式 (12) より明らかに $\Delta\psi = \epsilon C \langle Q_x(t), \Delta_i(t) \rangle$ となる (式 (12) の右辺でパルス幅 Δt は τ のスケールで見ても $\epsilon\Delta t$ となることに注意)。したがって $\Delta\psi$ を $C\Delta t$ で割ったものは i にのみ依存する関数として一意に定まり、これがインパルス応答関数 R を定義している。

実際には上の $\Delta\psi$ は式 (1) で与えられたシステム^(注2) に時刻 $t = t_i$ で単一微小インパルスを入力した結果引き起こされる位相シフト $\Delta\psi$ を測定することで求められる。

さて、ここで $(T/2\pi)\Delta\psi/(\epsilon C\Delta t) \equiv R(t_i)$ として $N \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$) として連続極限を考える^(注3)。そうすると、式 (12) から

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} - \Delta\omega &= \frac{2\pi}{T} \sum_{i=1}^N P_x(t_i) R(t_i) \Delta t \\ &\rightarrow \frac{2\pi}{T} \int_0^T R(t + \tilde{\psi}) P_x(t + \tilde{\psi}_{ext}) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) を式 (4), (5) と比べると内積の一意性から $R(t) = Q_x(t)$ であることが帰結される。以上から、インパルス応答関数を精度良く求めたとすると、これは随伴固有関数を求めていることと等価であることが分かる。実際にはインパルス応答関数は有限精度で離散時刻 t_i 上で定義されるので、これは随伴固有関数の近似値をサンプリングするものといえるだろう。

3. 具体例における比較検討

随伴固有関数法とインパルス応答関数法の等価性は以上で明らかになったので、次にそれぞれの縮約方法における計算上の問題点について考察する。

まず簡単な例題として二つの van der Pol 発振器の結合系を考えよう。その方程式は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -x_i + \alpha(1 - x_i^2)y_i + \epsilon P_y(t). \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $P_y(t) = x_j - x_i, \alpha = 0.1, \epsilon = 0.001, i, j =$

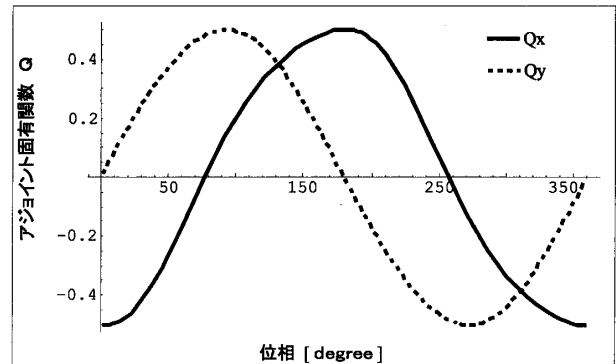


図 2 随伴固有関数 $Q(t) = (Q_x, Q_y)$ の 1 周期の波形 (1 周期を 360 度に正規化している)

Fig. 2 Waveform of the adjoint eigenfunction $Q(t) = (Q_x, Q_y)$. One period is rescaled to 360 degrees.

1, 2 とする。

この場合に随伴固有関数法を適用する場合の計算過程を以下に説明する。まず、 $\epsilon = 0$ とした無摂動時の式 (15) のもつリミットサイクル $\gamma(t) = (\gamma_x, \gamma_y)$ を求める。これをもとに、式 (2) で与えられる変分方程式の随伴が定まり、この非自明な解として随伴固有関数 Q が求まる^(注4)。その形状は図 2 のとおりである。これらの γ, Q から式 (5) により $H(\cdot)$ が求まり、式 (4) が定まる。式 (5) の計算として、この場合 γ, Q をフーリエ級数展開しておくことと便利である。ここで、式 (5) は

$$\begin{aligned} H(\psi_j(\tau) - \psi_i(\tau)) &\equiv \frac{2\pi}{T} \int_0^T Q_y(t + \tilde{\psi}_i) (\gamma_x^j(t + \tilde{\psi}_j) - \gamma_x^i(t + \tilde{\psi}_i)) dt \end{aligned} \quad (16)$$

により与えられ、 $\psi_{i,j}$ はそれぞれ i, j 番目のリミットサイクルの発振位相、 $\gamma_x^{i,j}$ はそれぞれ i, j 番目のリミットサイクルの x 成分を表している。

一方、インパルス応答関数法を適用する場合の計算過程は以下のとおりである。今 $P_x = 0$ としているので、 I の第 1 成分 I_1 は不要で、第 2 成分 I_2 のみが必要である。 I_2 は式 (15) で ϵP_y としてインパルスを入力することで得られ、周期関数であり、これもフーリエ級数展開しておくことと計算上便利である。この I_2 を用いて、前出の式 (6), (7) により位相方程式が得られ

(注2)：明示的に方程式が与えられていなくてもよい。

(注3)：ここでは暗黙に対象とするベクトル場が連続かつほとんどの点で微分可能であることを仮定している。そのもとで、式 (11) における内積と総和の交換と更に極限操作が行われる。

(注4)：この詳細は例えば [2] に説明がある。

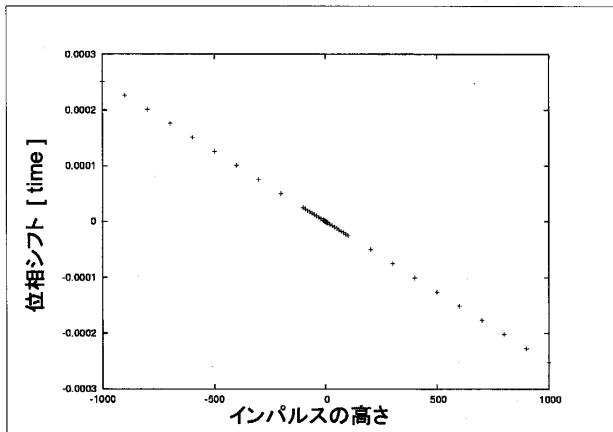


図3 インパルスの高さと位相シフトの関係 (パルス幅は0.001とし、インパルス入力タイミングは式(15)の変数 x_1 が0を交差する立上りの付近とした)

Fig. 3 Phase shift with respect to the impulse height. The pulse width is 0.001 and the timing of impulse input is fixed at the rising zero-crossing of x_1 in (15).

る。注意すべき点は前章で述べたように印加するインパルスの高さ/幅の設定についてである。幅については、数値積分の制約上、極端に小さくできないが、周期 T に比べ十分に小さく設定すればよい。一方、インパルスの高さについては幅を十分小さく固定した上で高さを変化させていくと、インパルスの高さと引き起こされる位相シフトの間にはインパルス高さがある範囲ではほぼ線形関係が成立する。この性質は [7] では LRR (linear response region) として特徴づけられているが、数学的には式 (1) の変分方程式 (ベクトル場の線形化) がリミットサイクル近傍のベクトル場の十分良い近似になっていることの結果である。したがって、その対偶として、線形関係が明らかに成立しない範囲では式 (1) の変分方程式による近似が成立しないことになり、したがって位相方程式への縮約の大前提が成立しないことになる。

今、式 (15) の例においては図 3 のようにインパルス幅を 0.001 と設定し、位相シフトをプロットすると相当に高いインパルスに対しても線形関係が成り立つことが分かる。このタイプのシステムは位相方程式の縮約において成立する ϵ の範囲が広く、扱いやすいタイプといえるだろう。このようにして、インパルス応答関数法により得られる位相方程式の右辺と随伴固有関数法による結果を比較すると、図 4 のように高い精度で一致することが分かる。また図 4 におけるデータ点は式 (15) で直接シミュレーションを行った際に得ら

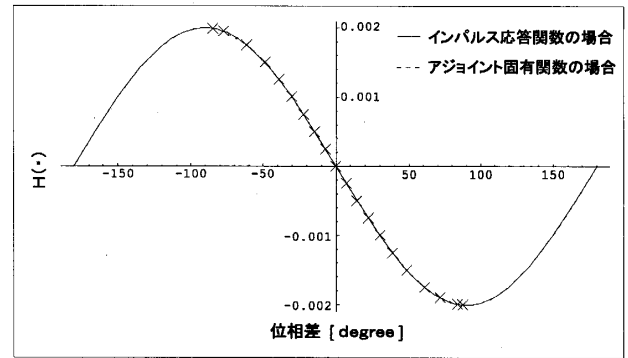


図4 インパルス応答関数法と随伴固有関数法による $H(\cdot)$ の導出結果、及びシミュレーションによる引込特性 (点 \times でプロットしている) との比較

Fig. 4 Obtained $H(\cdot)$ with impulse response function method and adjoint function method. Entrainment characteristics by direct simulations are also plotted with \times for comparison.

れる引込特性^(注5)を表示しており、位相方程式による理論値と一致することが確認される。

次に特異摂動問題としてよく知られている強非線形系である Bonhoeffer-van der Pol 発振器の相互結合系の場合を考える。

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx_i}{dt} &= x_i - x_i^3/3 - y_i + \epsilon P_x(t), \\ \frac{dy_i}{dt} &= x_i + d. \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $P_x(t) = x_j, d = 0.5, \epsilon = 0.001, i, j = 1, 2$ である。このとき $\mu \rightarrow 0$ の極限で随伴固有関数 Q は解析的に得られることが知られている [8]。もちろん μ が有限値であるときは Q は解析的に求まらないので、ここで $\mu = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ に対してそれぞれ Q を式 (2) を満たす周期解により求める。結果はそれぞれ図 5~図 8 のとおりである。 $Q_x(t)$ の形状は $\mu \rightarrow 0$ になるにつれ鋭い正負 1 対のパルス状になることが分かる。

ここでは式 (2) の数値積分において可変ステップサイズのルンゲクッタ法を用いているが、パルス状の部分の計算においては非常に小さなステップサイズが必要となることに注意しなければならない。

一方、インパルス応答関数法を適用すると、前記のように van der Pol 発振器の場合式 (15) において得られた線形関係 (図 3) が成立する範囲 (LRR) が広いことと対照的に線形関係が成立するインパルスの高

(注5)：ここで縦軸は一つの振動子に注目した際の自然周波数と引込周波数の差に対応する。厳密には付録の式 (A.2) 以下で定義される $-\Delta\omega$ に相当している。

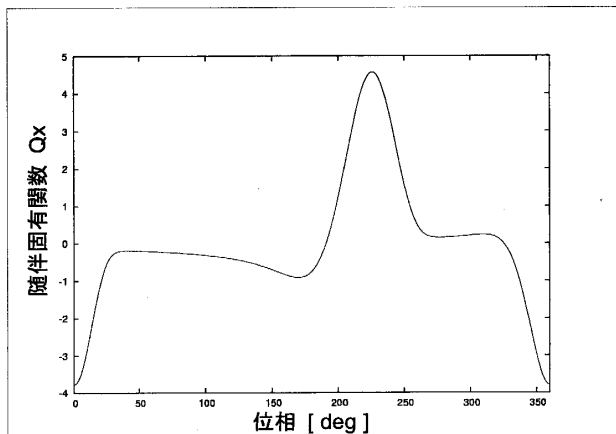


図 5 $\mu = 0.1$ における随伴固有関数 Q_x の形状
Fig. 5 Adjoint eigenfunction Q_x for $\mu = 0.1$.

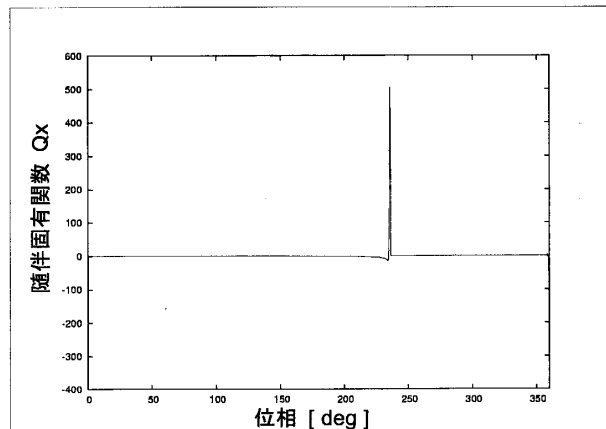


図 8 $\mu = 0.0001$ における随伴固有関数 Q_x の形状
Fig. 8 Adjoint eigenfunction Q_x for $\mu = 0.0001$.

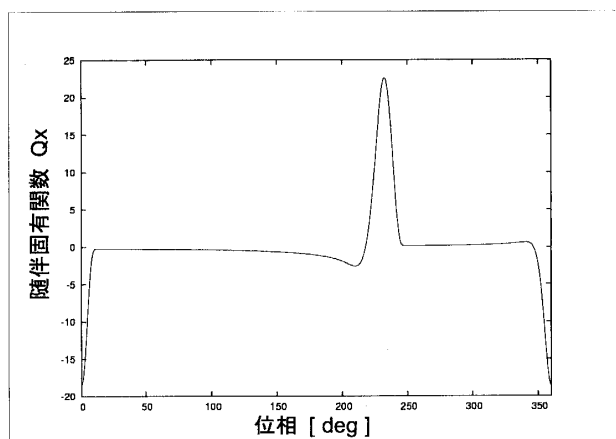


図 6 $\mu = 0.01$ における随伴固有関数 Q_x の形状
Fig. 6 Adjoint eigenfunction Q_x for $\mu = 0.01$.

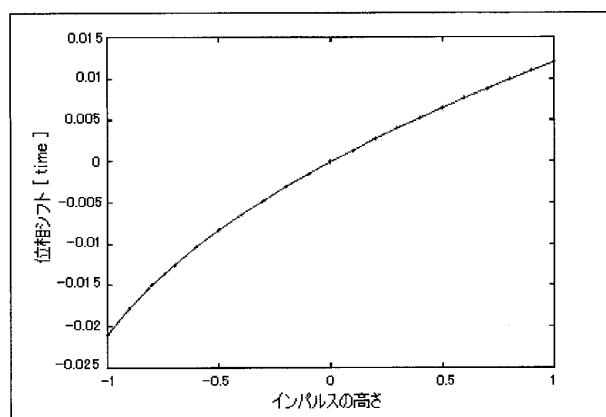


図 9 インパルスの高さとの位相シフトの関係 (パルス幅は 0.001 とした $\mu = 0.001$ の場合)
Fig. 9 Phase shift with respect to the impulse height. The pulse width is 0.001. Case of $\mu = 0.001$.

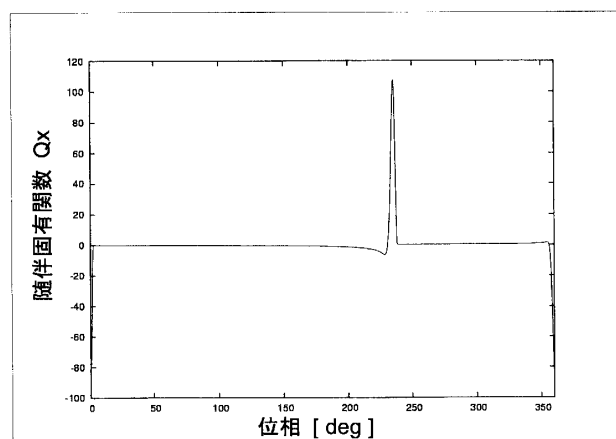


図 7 $\mu = 0.001$ における随伴固有関数 Q_x の形状
Fig. 7 Adjoint eigenfunction Q_x for $\mu = 0.001$.

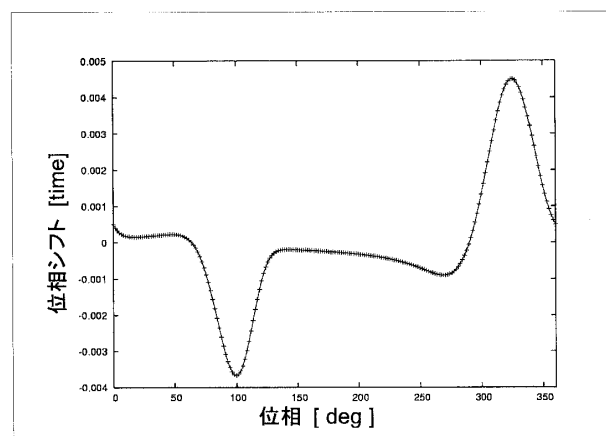


図 10 $\mu = 0.1$ におけるインパルス応答関数の形状 (パルス高さ, パルス幅) = (0.01, 0.1) とした)
Fig. 10 Impulse response function for $\mu = 0.1$. The pulse height and width is arc 0.01 and 0.1, respectively.

さはかなり制限されることが分かる (図 9)。このことからインパルスをも十分小さく設定してインパルス応答関数を求めた結果は図 10~図 13 のとおりである。ここで、インパルス幅はひとまず 0.1 と設定している。

図 5~図 8 の随伴固有関数と図 10~図 13 をそれぞれ比較すると^(注6)、図 10、図 11 の場合、いずれも

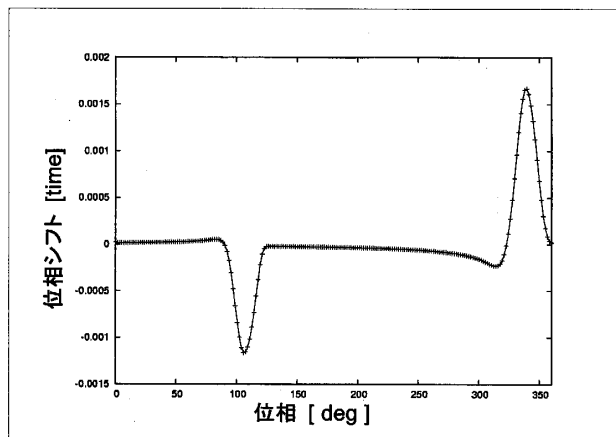


図 11 $\mu = 0.01$ におけるインパルス応答関数の形状 ((パルス高さ, パルス幅) = (0.001, 0.1) とした)

Fig. 11 Impulse response function for $\mu = 0.01$. The pulse height and width are 0.001 and 0.1, respectively.

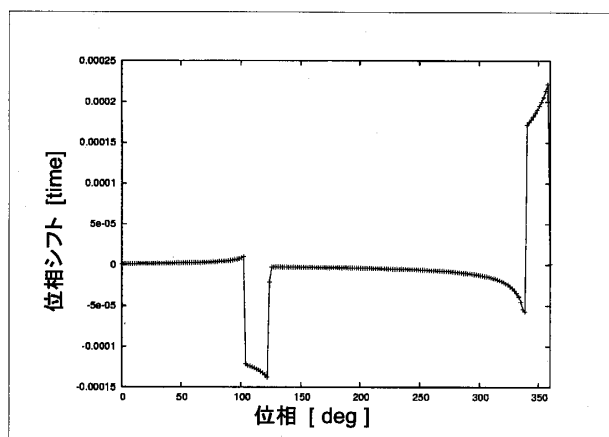


図 13 $\mu = 0.0001$ におけるインパルス応答関数の形状 ((パルス高さ, パルス幅) = (0.00001, 0.1) とした)

Fig. 13 Impulse response function for $\mu = 0.0001$. The pulse height and width are 0.00001 and 0.1, respectively.

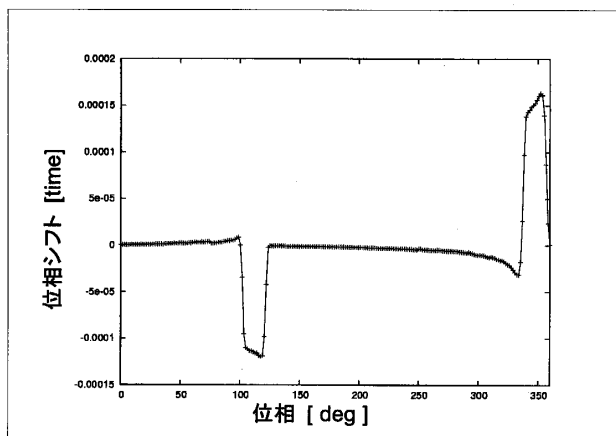


図 12 $\mu = 0.001$ におけるインパルス応答関数の形状 ((パルス高さ, パルス幅) = (0.0001, 0.1) とした)

Fig. 12 Impulse response function for $\mu = 0.001$. The pulse height and width are 0.0001 and 0.1, respectively.

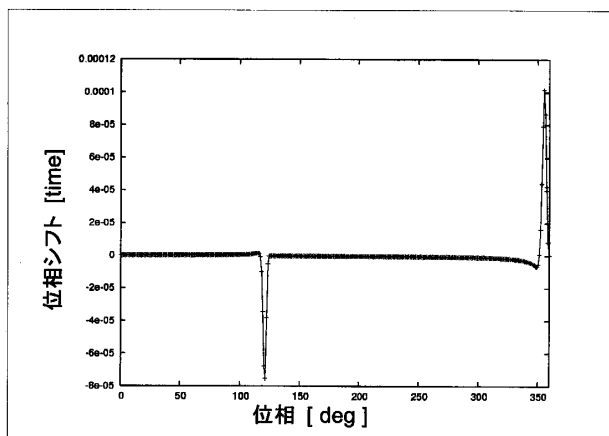


図 14 $\mu = 0.001$ におけるインパルス応答関数の形状 ((パルス高さ, パルス幅) = (0.0001, 0.01) とした)

Fig. 14 Impulse response function for $\mu = 0.001$. The pulse height and width are 0.0001 and 0.01, respectively.

図 5, 図 6 の随伴固有関数の十分良い近似となっていることが認められる。ところが, 図 12, 図 13 を見ると明らかに図 7, 図 8 の随伴固有関数と異なるものになっている。上記の議論からインパルス応答関数は随伴固有関数を近似的にサンプリングしたものであることが分かっているので, ここでサンプリングの精度を上げて $\mu = 0.001, 0.0001$ についてインパルス応答関数を再計算した。具体的にはパルス高さはそのままパルス幅を 1/10 の 0.01 とする。その結果, 図 14, 図 15 のようなインパルス応答関数が得られ, これはそれぞれ図 7, 図 8 の随伴固有関数に一致する形状となることが認められる。

以上から, インパルス応答関数法を適用する際には

システムの随伴固有関数 Q の形状が急激な変化を示している場合にはパルスのサイズの設定を注意深く行わないとならないことが理解される。

4. む す び

2. の議論から, 随伴固有関数法とインパルス応答関数法の等価性が確かめられた。また 3. の結果から, 必ずしもシステムの方程式が明示的に与えられていない現実的な対象にインパルス応答関数法を適用する際の

(注6): ここでは, 随伴固有関数法とインパルス応答関数法の計算過程で現れる随伴固有関数とインパルス応答関数の形状の差について注目する。縦軸のスケールと横軸における位相の差は最終的に得られる $H(\cdot)$ には影響を与えない。

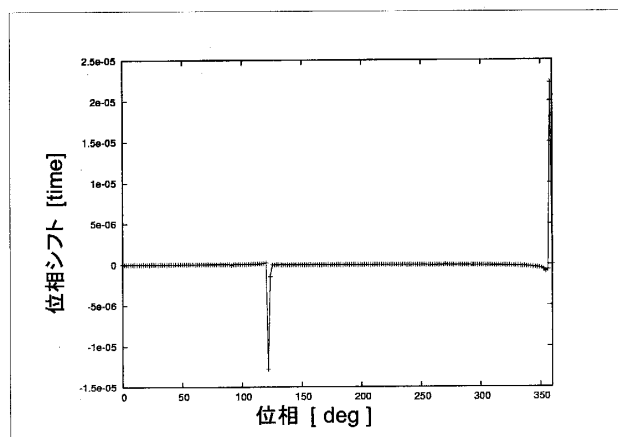


図 15 $\mu = 0.0001$ におけるインパルス応答関数の形状 (パルス高さ, パルス幅) = (0.00001, 0.01) とした

Fig. 15 Impulse response function for $\mu = 0.0001$. The pulse height and width are 0.00001 and 0.01, respectively.

問題点が明らかとなった。すなわち、

(i) 式 (15) のように LRR が広くリミットサイクル近傍での式 (2) のベクトル場の線形近似が成立するシステムにおいては、注入するインパルスの高さ/幅はそれほどシビアに制限しなくても、インパルス応答関数は随伴固有関数の良い近似となる。

(ii) 逆に式 (17) のようにリミットサイクル近傍でのベクトル場の線形近似が成立する範囲が狭いシステムの場合、注入するパルスの高さは LRR に収まるように設定すると同時にパルスの幅は相当に狭く設定しなければならないことがある。

実験系を対象とする場合には、(CAD 上の理想的な回路シミュレーションと異なり) システム内部にノイズが存在するので、以上の (ii) のような場合には注入するパルスのサイズ (すなわち、パルスの高さと幅) がノイズのレベルに比べて十分大きく設定可能でない場合には、図 10, 図 11 のように滑らかなインパルス応答関数は得られず、本論文で述べた素朴なインパルス応答関数法の適用が困難となる。

またこのノイズ耐性の一つの解決法として、インパルス応答関数法と別に随伴固有関数を近似的に求める新しい実用的な方法も構成可能であり、これについては別に発表予定である。

文 献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [2] B. Ermentrout, "Type I membranes, phase resetting

curves, and synchrony," *Neural Comput.*, vol.8, no.5, pp.979-1001, 1996.

- [3] J. Rinzel and B. Ermentrout, "Analysis of neural excitability and oscillations," in *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks*, ed. C. Koch and I. Segev, 2nd ed., pp.251-291, MIT Press, Cambridge, 1998.
- [4] H. Tanaka, A. Hasegawa, H. Mizuno, and T. Endoh, "Synchronizability of distributed clock oscillators," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.49, no.9, pp.1271-1278, 2002.
- [5] C. Kurrer, "Synchronization and desynchronization of weakly coupled oscillators," *Phys. Rev. E*, vol.56, no.4, pp.3799-3802, 1996.
- [6] B. Ermentrout and N. Kopell, "Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators," *J. Mathematical Biology*, vol.29, pp.195-217, 1991.
- [7] A. Hajimiri and T.H. Lee, "A general theory of phase noise in electrical oscillators," *IEEE Trans. Solid-State Circuits*, vol.33, pp.179-194, 1998.
- [8] E.M. Izhikevich, "Phase equations for relaxation oscillators," *SIAM J. Appl. Math.*, vol.60, no.5, pp.1789-1805, 2000.

付 録

式 (4), (5) の導出

以下に [6] による Fredholm 理論を本論文の問題設定向きに書き換えた導出過程を説明する。式 (1) に対し弱い摂動が加わったシステム

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) + \epsilon P(t). \quad (\text{A}\cdot 1)$$

を考える。 $\epsilon = 0$ でのリミットサイクル $\gamma(t)$ の周期を T_0 , これに対し $P(t)$ の周期を T とし、 $T_0 \sim T$ とする。

今引込が生じているとすると、式 (A.1) の解は

$$X(t) = \gamma(t - \Delta\omega t + \psi) + \epsilon u(t) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A}\cdot 2)$$

と与えられる。ここで $\Delta\omega$ は $(1 - \epsilon\Delta\omega)T = T_0$ を満たすように定義する。 ϵu は $\gamma(\cdot)$ からの変位を表している。式 (A.2) を式 (A.1) に代入して、 ϵ のオーダーで整理すると、次が成立する。

$$\Phi' \left(\frac{d\psi}{d\tau} - \Delta\omega \right) + u' + DF(\gamma(\cdot))u - P. \quad (\text{A}\cdot 3)$$

ここで線形作用素 L を $L \equiv \left(\frac{d}{d\tau} - \Delta F \right)$ と定義して、式 (A.3) に左から Q を掛けると、次が成立する。

$$\langle Q, \Phi' \rangle \left(\frac{d\psi}{d\tau} - \Delta\omega \right) + \langle Q, Lu \rangle = \langle Q, P \rangle. \quad (\text{A}\cdot 4)$$

ここで $\langle Q, Lu \rangle$ に注目する. Fredholm の交代定理から L の随伴 L^* が存在し, $\langle Q, Lu \rangle = \langle L^*Q, u \rangle$ が成立する. ここで Q は $L^*Q = 0$ を満たす周期 T の周期関数であるとする. すなわち Q は

$$L^*Q = \left(-\frac{d}{dt} - DF^T(\gamma) \right) Q = 0 \quad (\text{A.5})$$

を満たす随伴固有関数である. ここで L^* は具体的に式 (A.5) 中のように構成され, $\langle Q, \Phi' \rangle \equiv$ 定数となることに注意する.

以上から式 (A.5) を満たす Q を $\langle Q, \Phi' \rangle \equiv 1$ となるように選び, 式 (A.4) に代入すると,

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \Delta\omega + \langle Q, P \rangle \quad (\text{A.6})$$

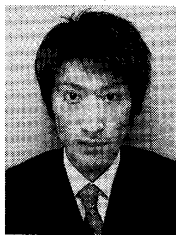
が導出される. ここで

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \frac{2\pi}{T} \int_0^T Q(t + \tilde{\psi})^T P(t + \tilde{\psi}_{ext}) dt \\ &= H(\psi_{ext} - \psi) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

である.

(平成 16 年 12 月 24 日受付, 17 年 4 月 2 日再受付,
11 月 1 日最終原稿受付)

毎野 裕亮



2005 電通大・電気通信・電子卒. 現在同大大学院情報システム学研究科情報システム運用学専攻在学中. 複雑系科学, 特に同期現象に興味をもつ.

太田 大輔



2004 電通大・電気通信・電子卒. 現在, 同大大学院電子通信学研究科電子工学専攻在学中. 非線形物理, 複雑系科学に興味をもつ. 現在, アドホックネットワークの研究に従事.

田中 久陽 (正員)



1995 早大大学院博士課程了. 工博. 同年より, 日本学術振興会特別研究員 (PD). 1996 カリフォルニア大バークレイ校客員研究員. 1997 よりソニーコンピューターサイエンス研究所研究員. 2001 電気通信大学電気通信学部電子工学科助教授. 通信システム, 数理生物学, 非線形物理等の横断的分野の研究に従事. 日本物理学会, 情報処理学会, IEEE 各会員.