

注入同期の物理限界

田中久陽

1 はじめに

現在の情報通信の基盤として、「注入同期 (injection locking)」という技術は、近年、地味に注目を集めているトピックである。注入同期現象とは自励発振器 (非線形振動子) に外部信号を強制注入すると発振器が外部信号に同期する現象で基本的な物理現象である。これを利用する技術は真空管時代に端を発し、現在のミリ波等の高周波数帯での利用、省電力設計、回路の微細化の要請から、現在リバイバルが進んでいる。たとえばミリ波帯を用いるベースバンド通信において、注入同期回路は通信の品質を保証する必須構成要素である。Fig. 1 に示すようにベースバンド通信では、送信側は高レートのデータシグナルそのものを搬送波にダイレクトに重畳して送信し、受信側はこの「搬送波」を外部信

号 (入力) として、受信器の発振器の注入同期により、搬送波の周波数に正確に追従、同期する。これにより、送信されたデータシグナルが正しく復号、受信されることになる。このベースバンド通信を用いると、例えば PC やビデオのような機器内部の大容量のデータ通信に必要な配線が近距離無線により置き換えられ、大量の配線が削減される大きなメリットが生じる。このような背景で、VLSI 技術のオリンピックと呼ばれる国際会議 ISSCC では、注入同期回路に関連する発表が過去数年間、継続的に報告されている (例えば [1])。一方で、サイエンスとしての重要性からも Nature, Science 誌等を筆頭に注入同期に関連する物理や生体リズム (生物時計) の研究が継続的に報告されてきている。ここでは、注入同期は引き込み (entrainment) とよばれることが多く、この引き込みが非線形振動子の

【筆者紹介】



たなか ひさあき。1990 年 早稲田大学理工学部電気工学科卒業。1992 年 同大学大学院理工学研究科修士課程修了。1995 年 同大学院理工学研究科博士後期課程修了。博工 (工学)。同年より、日本学術振興会特別研究員 (PD)。1996 年カリフォルニア大パークレー校客員研究員。1997 年よりソニーコンピューターサイエンス研究所研究員。2001 年より電気通信大学電気通信学研究科助教授 (現在、情報理工学研究科・准教授)、現在に至る。情報通信システム、非線形物理等の分野横断的領域の研究に従事。2006、2007、2009 年第 22 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム技術賞)、第 23 回、第 25 回電気通信普及財団賞 (テレコムシステム奨励賞) 各受賞。

集団のパターン形成の基礎となっている [2][3]. ところが, この注入同期の物理限界 (実現可能限界) にはひとつの数理が潜んでいる. これを紹介することが本稿の目的である.

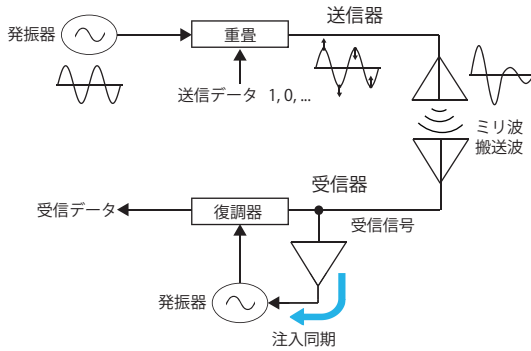


Fig. 1 注入同期の応用例: ベースバンド通信

2 注入同期の最適化問題

まずはじめに, 注入同期の解析を目的として利用可能な解析的アプローチについて概説する. 注入同期の性能を評価する尺度として, ロックレンジ (locking range) は重要である. ロックレンジとは注入同期が成立する外部信号 (入力) の周波数帯域のことであり, これが広ければ, より柔軟かつロバストな注入同期が得られるからである. これを Fig. 2A に示す. ここで, 縦軸の $\Delta\omega$ は発振器の自励発振周波数と入力周波数の差 (離調) を表し, 横軸は入力の強度を表す. この, くさび状のロックレンジ^{†1}の外では, 同期が成立せず利用不可能となる. 以下では入力の強度が十分小さな, 弱入力の場合を仮定する. この仮定は, 先に述べたベースバンド通信などの現在の電子機器においても, 入力 (電流) がデバイスを損傷しないために, また省電力性の要請からも, 自然で合理的なものである.

工学分野での注入同期の先行研究は, アドラー [4] にはじまり, その後, 黒川 [5], 大黒ら [6] と一般化が進み, かつ解析の対象も広がっているが, その本質は, 次のいわゆるアドラーの方程式により

^{†1} 非線形ダイナミクスの分野では, これをアーノルドタンゲとよぶ.

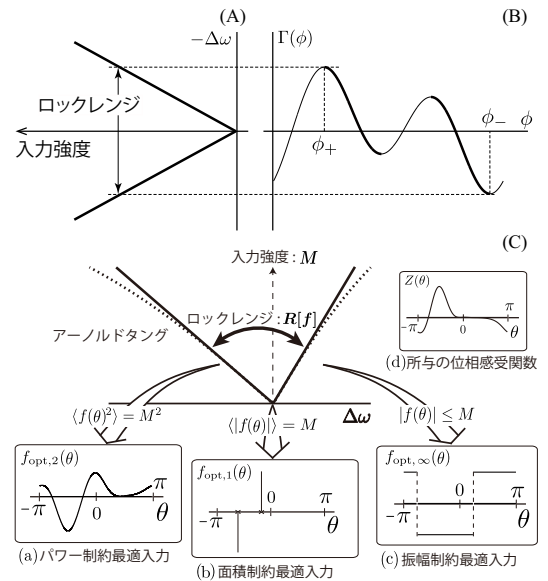


Fig. 2 (A) ロックレンジ, (B) 位相結合関数, (C) 最適入力の様子

理解される.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Delta\omega - \epsilon \sin \alpha \quad (1)$$

ここで α は発振器の発振位相と入力信号の位相差を示し, $\Delta\omega$ は離調を示す. これによって, ロックレンジが定まるのみならず, 同期へ至る過渡状態や同期の安定性解析が可能になる. この先行研究の枠組みは, 現在でも諸々の対象に適用されている (例として [7][8]) が, その前提条件が発振器は弱非線形, かつ入力はほぼ正弦波と仮定しており, 発振器の非線形性が強い場合や, 入力が正弦波から大きく外れる場合には, その適用が一般に困難となる.

次にアドラーの方程式の一般化と見做される, 位相方程式の導出と, それによる注入同期の解析について説明する. ここで扱う発振器はリミットサイクル解を持つ非線形振動子とみなせる. そのダイナミクスは一般に, 次の方程式にしたがう.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}(t) \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ は状態変数, $\mathbf{I}(t) \in \mathbf{R}^n$ は周期的入力を表す. ここでは, 簡単のため (一般性を失わず), 入力 $\mathbf{I}(t)$ は回路中の 1 点に注入される入力

$f(t) \in \mathbf{R}$ とする。このとき、リミットサイクル解を $\mathbf{x}_0(\in \mathbf{R}^n)$ とすると、これに沿って発振位相に相当する $\psi(\in [0, 2\pi] \equiv S)$ という(局所的な)変数が導入される。その結果、入力 f が弱入力という仮定の下で、式(2)は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ の近傍において次の ψ についての方程式に縮約される。

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + Z(\psi) \cdot f(t) \quad (3)$$

ここで、 ω は自励発振周波数、 $Z(\psi)$ は位相感受関数とよばれる周期関数である。さらに入力の周波数を $\Omega(\sim \omega)$ とすると、 ψ に代わる変数 $\phi = \psi - \Omega t$ が定義される。これは発振状態と入力の位相差に対応する「遅い」変数とみなされ、速い動きに関する平均化により、 ϕ について閉じた次の位相方程式が得られる。

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma(\phi), \quad (4)$$

ただし $\Gamma(\phi) = \langle Z(\theta + \phi)f(\theta) \rangle$ 。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は θ についての1周期にわたる平均^{†1}を示し、 $\Gamma(\phi)$ は位相結合関数とよばれる。以上の局所変数 ψ の存在や、(4)の位相方程式への縮約は数学的に厳密な結果であり[9]、非線形物理の分野でも独自に同等の結果が得られている[3]。なお、(1)のアドラーの方程式は(4)の一つの例とみなされる。

Fig. 2B はロックレンジの導出を説明している。注入同期が成立するための必要十分条件は、 ϕ が $d\phi/dt = 0$ かつ $\Gamma'(\phi) < 0$ をみたすことであり、位相結合関数の最大値 $\Gamma(\phi_+)$ と最小値 $\Gamma(\phi_-)$ の範囲内に離調 ($-\Delta\omega$) が入っていることが導かれる。

以上は、1:1 引き込み(すなわち、 $\omega:\Omega \approx 1:1$)の場合であるが、同様のことが $m:n$ 引き込み(すなわち、 $\omega:\Omega \approx m:n$)の場合に成立する。その場合の位相方程式は、

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma_{m/n}(\phi), \quad (5)$$

ただし $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$ となる。上記の位相感受関数 Z は、これまで工学分野でも独自

に見出され、ISF[10] や PPV[11]^{†2} とよばれている。実際に所与の発振器に対し位相方程式を導く際、この Z を正確にかつ効率良く求めることが重要である。これは例えば[12][13]のような複雑な発振器に対しても、インパルス応答関数法[14]により、回路シミュレーター(SPICE)から直接に、数値的に得ることが可能になっている。

2.1 最適入力 の存在: 変分法によるアプローチ

以上の準備のもとで、注入同期を最適化する最適化問題が定式化される[15][16]。たとえばロックレンジを最大化する場合は、以下のように考える[15]。まず、入力 f に対し、次の汎関数を定義する。

$$J[f] \equiv R[f] + \lambda \langle f(\theta) - C \rangle \quad (6)$$

ここで、 $R[f]$ は f に対し(Fig. 2Bのように、一般に一意に定まる)ロックレンジを与え、具体的には

$$\begin{aligned} R[f] &= \Gamma(\phi_+) - \Gamma(\phi_-) \\ &= \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} f(\theta) \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

と表示される。ここで ϕ_+ および ϕ_- は、それぞれ位相結合関数 $\Gamma(\phi)$ が最大・最小となる ϕ を表している。また、 $\langle f(\theta) - C \rangle = 0$ は入力 f の1周期平均が C となる制約条件であり、特に $C = 0$ のときチャージバランス制約とよばれる。これはつまり、注入される正味の電荷がゼロになるという制約である。また(6)の λ はラグランジュの未定乗数である。要するに(6)により、 $\langle f(\theta) \rangle \equiv C = 0$ という制約を満たす f のうち、 $R[f]$ を最大にする最適解 f_{opt} を決めるための (f, λ) についての極値問題が定式化される。

この極値問題が一意に解をもつためには、もう一つ制約条件が必要である。たとえばパワー=一定とした入力、すなわち、 $\langle f^2(\theta) \rangle = \text{一定}$ という制約条件を課すと、その最適解 f_{opt} は、変分法を用

†1 具体的には、 $\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdot d\theta$ である。

†2 [11]では、(4)を(1)のアドラーの方程式と対比して、一般化アドラー方程式とよんでいる。

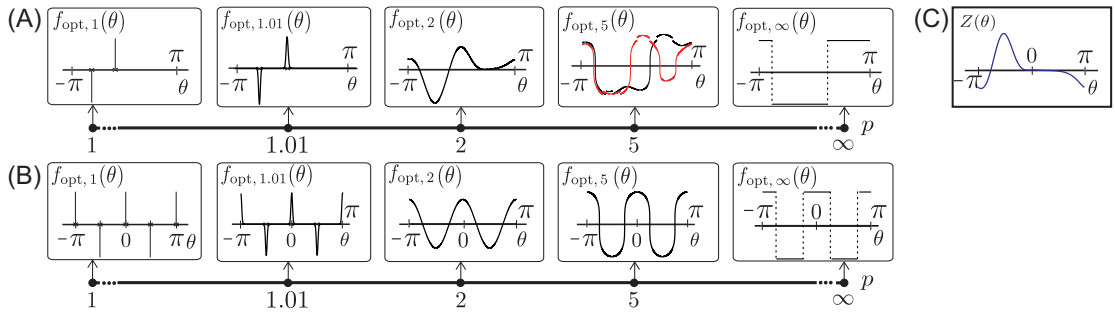


Fig. 3 最適注入同期の概要

いて

$$f_{\text{opt}}(\theta) = \frac{1}{2\lambda} \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} \quad (8)$$

と求まり、その極大性も確認される [15]. ここで $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{Q/P}$, ただし $P = \langle f^2(\theta) \rangle$, $Q = \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\}^2 \rangle$ であり, ϕ_{\pm} は Z についての非線形方程式から数値的に得られる [15].

またロックレンジを最大化する代わりに、引き込み状態の (線形) 安定性を最大化することも可能である. この場合は $R[f]$ の代わりに $S[f] = -\Gamma'(\phi_*)$ として、その極値問題に帰着する [16]^{†1}.

以上においては、変分法 (オイラー・ラグランジュ方程式) が用いられ、これによる最適解は (8) の ϕ_{\pm} に対し、一般に複数得られることが判明した. しかし、その他にも最適解があるのか、さらにそれらの中で最適な最適解 (すなわち物理的境界) とは何であるか、についての情報は変分法によっては原理的に得られず、モヤモヤした感じが残っていた.

2.2 注入同期の物理境界の存在: 不等式によるアプローチ

ところが、最近の筆者の研究 [17] により、この最適な最適解の存在や非存在、さらにより広いクラスの制約条件下での最適解が議論でき、注入同期の物理境界の存在が明らかになってきた. 例えば、以下の基本的な問題は応用上も重要であるが、これらが解答可能となる.

^{†1} ここで ϕ_* は (4) の定常解を示し、一般性を失わず 0 とおいてよい.

P1 上で述べたパワー制約された入力 ($\langle f^2(\theta) \rangle = P = \text{一定}$) に対し、1:1 引き込みのロックレンジを最大化するものは存在するか? もし、存在するならば、それは唯一か? また、その最大ロックレンジの物理的な意味はどのように特徴付けられるのか?

P2 上記のパワー制約入力に代わり、面積制約された入力 (つまり、その値の絶対値の積分が一定値に抑えられた入力) に対し、1:1 引き込みのロックレンジを最大化するものは存在するか?あるいは振幅制約された入力 (つまり、その絶対値が一定値以内に抑えられた入力) の場合はどうか? それらはどのように特徴付けられるのか?

P3 以上での 1:1 引き込みの最適化問題は、一般の $m:n$ 引き込みの場合にも成り立つか? もし、そうならば、その場合の最大ロックレンジはどのように特徴付けられるのか? また、1:1 引き込みの場合とどのような関係があるのか?

これらの基本問題 **P1**, **P2**, **P3** に対し、ある意味で完全な解答が可能であることを (以下の **S1**, **S2**, **S3** において) 示す. その準備として、まず入力 f の属すクラスとして p 乗可積分関数 $L^p(S)$ を仮定しよう.

$$\|f\|_p \equiv \langle |f(\theta)|^p \rangle^{\frac{1}{p}} = M < \infty, \quad (9)$$

ただし、 $p \geq 1$ であり、 M は正定数とする. 特に $p = 2$ の場合、(9) は $\langle f^2 \rangle = M^2$, すなわち f のパワーが M^2 に制約されることを示す. また、 $p = 1$ の場合、 $\langle |f| \rangle = M$, すなわち f の「面積」が M に

制約される. 一方, $p = \infty$ では (9) は $\|f\|_\infty = M$ に相当し, $\|f\|_\infty$ は $|f(\theta)|$ の本質的上限 (ess. sup) なので $|f(\theta)| < M$ (殆んど全ての $\theta \in S$) となる. 要するに, これらの f には微分可能性や連続性も必要とせず, 2.1 の変分法によるアプローチで暗黙に仮定していたよりも広いクラスの関数となっている.

さらに, (9) に加え, 先に述べたチャージバランス制約を導入する

$$\langle f(\theta) \rangle = 0. \quad (10)$$

以上のもとで, 2.1 でのパワー制約のもとでの注入同期のロックレンジの最大化は, 次の最適化問題として定式化される. 愚直に書くと

$$\begin{aligned} & \text{maximize } R[f] \\ & \text{subject to } \langle f(\theta) \rangle = 0, \|f\|_p = M \end{aligned} \quad (11)$$

となるが, 2.1 と同様に, 少し工夫をして, $\|f\|_p = M$ のもとで $J[f] = R[f] + \lambda \langle f(\theta) \rangle$ を最大化する f と λ を求める問題に焼き直すことができる. さらに, この $J[f]$ は, (7) により次のように 2 つの関数 f と g の内積として表示が可能である:

$$J[f] = \langle f(\theta)[\bar{Z}(\theta) + \lambda] \rangle \equiv \langle f(\theta)g(\theta) \rangle, \quad (12)$$

ただし $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$, $\bar{Z}(\theta) \equiv Z(\theta + \Delta\phi) - Z(\theta)$ および $\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_-$ であり, この $\Delta\phi$ は変数 θ の座標変換 $\theta + \phi_- \rightarrow \theta$ により自然に導入された. 一方, 引き込み状態の (線形) 安定性最大化は, (11) において $R[f]$ を単に $S[f] = -\Gamma'(\phi_*) = -\langle f(\theta)Z'(\theta) \rangle$ とおき換えればよい. したがって, この場合は (12) の $g(\theta)$ を $g(\theta) = -Z'(\theta)$ とおけば, 同様の議論が可能となるので, 以下ではロックレンジ最大化の $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$ の場合のみを考える.

2.1 では, この $J[f]$ の最大化に変分法を用いたが, (12) をみれば, この問題はしかるべき構造をもつことに気がつく. そのキーとなるのが, 次のヘルダーの不等式 (Hölder's inequality)[18] である.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (13)$$

ただし, この p, q は $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を満たす. この (13) より, (12) の $J[f]$ を最大化することは,

$$\begin{aligned} J[f] &= \langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle \\ &= \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = M \|g\|_q \end{aligned} \quad (14)$$

において全ての等号が成立する入力 f を, 所与の $g (= \bar{Z}(\theta) + \lambda)$ について求めることに帰着する. 紙面の制約から詳細は他に譲り, (先の P1, P2, P3 にそれぞれ対応して) 得られる結果を以下に整理しよう. その大枠は, Fig. 2C の (a), (b), (c) に示すように, $1 < p < \infty$ (特に $p = 2$), $p = 1$, $p = \infty$ の 3 通りに分類される^{†1}. おおのこの概要は以下の通りである.

S1 $1 < p < \infty$ の場合, 1:1 引き込みにおいて, 最適な入力 ($\equiv f_{\text{opt}, p}$) は $L_p(S)$ 内で唯一存在する. この $f_{\text{opt}, p}$ は, Z により陽に与えられ, このベストな最適入力に対応する最大ロックレンジとは, ヘルダーの不等式 (13) の右辺に他ならない.

S2 $p = 1$ の場合の 1:1 引き込みにおいても最大ロックレンジに上限が存在する. 一般的な Z に対し $L_1(S)$ 内でしかるべき正負一対のパルス入力 ($\equiv f_{\text{opt}, 1}$) を設計することにより, この上限へパルスの幅を細くするにつれ, いくらでも漸近可能である. このパルス入力の形状は上記の **S1** での最適入力における $p \rightarrow 1$ の極限と整合し, このロックレンジの上限は, ヘルダーの不等式 (13) の右辺で $p = 1$, $q = \infty$ とおいたものに相当する. 一方, $p = \infty$ の場合の 1:1 引き込みにおいて, 最適入力 ($\equiv f_{\text{opt}, \infty}$) は $L_\infty(S)$ 内で唯一存在し, Z により陽に表示され, **S1** の最適入力で $p \rightarrow \infty$ の極限に一致する. これに対応する最大ロックレンジは, ヘルダーの不等式の右辺で $p = \infty$, $q = 1$ とおいたものに相当する.

S3 ここでは簡単のため Z, f , および以下で定義する Z_n, f_m はいずれもフーリエ級数表示が可能な

^{†1} 本稿では, 周期的自発発火を示す Hodgkin-Huxley ニューロンモデル [16] から得られる Z を一例とする. これは, Fig. 2C の (d) および Fig. 3C に示す通りである.

クラスの関数とする: $Z(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_j (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)$, $f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_k (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta)$, $Z_n(\theta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_j (a_{nj} \cos nj\theta + b_{nj} \sin nj\theta)$, $f_m(\theta) \equiv \frac{c_0}{2} + \sum_k (c_{mk} \cos mk\theta + d_{mk} \sin mk\theta)^{\dagger 1}$. また対応する $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$ も, Z, f のフーリエ級数から項別積分により, フーリエ級数表示可能とする. このとき三角関数の積和の公式より $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z_n(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle = \langle Z_n(m\theta + \phi)f_m(n\theta) \rangle$ である. この式は, **S1, S2** で得られている 1:1 引き込みの最適入力を得るアルゴリズムにおいて, Z を Z_n とおきかえるのみで一般の $m:n$ 引き込みの最適入力が $f_m(n\theta)$ の形で得られることを示す^{†2}. Fig. 3A, Fig. 3B はそれぞれ 1:1 引き込みと 1:2 引き込みの最適入力を示すが, 1:2 の場合は 1:1 の場合に比べ波形がシンプルになっている. これは Z_n (ただし, ここでは $n=2$) において, Fig. 3C に示す元の Z での高調波からの寄与が少なくなるためであり, 一般に n が大きくなるにつれこの傾向が顕著になる.

これらの結果により, **P1, P2, P3** への解答が得られた. 以上の **S1, S2, S3** およびこれらに関する最適化アルゴリズムの基礎として, いくつかの定理が得られている [17]. ご利益として, **2.1** の先行研究 [15][16] では出来なかったことが可能になる. それは例えば, 次の事柄である. (1) 「注入同期の物理限界」の存在証明・本質を示すこと, (2) パルス入力の取り扱い, (3) ロックレンジの最大化, 安定性の最大化, 一般の $m:n$ 引き込みでの最適化問題が系統的に解答可能となること. 要するに, 以上により弱入力の場合の注入同期の物理限界に対し, 一般的に成立する「基本法則」のようなものがあると分かった.

それでは, この「基本法則」が当てはまる「物理」は他にもあるだろうか? 実は, 近年, 地味に盛り

^{†1} 直観的には Z_n, f_m はそれぞれ Z, f のフーリエ級数を nj, mk 項のみ残して間引いたものである.

^{†2} ただし, $m:1$ の引き込みの場合のみ例外的に, その最適入力が ($m:m=1:1$ 引き込みの場合と一致するため) 存在しないことになる. しかし, これが漸近的には, 1:1 引き込みの最適入力と一致するとみなすことは可能である.

上がっている Tsallis 統計 [19] が該当する [20]. これについては, 別報に譲るが, 筆者の知る限り, 広く知られているヘルダーの不等式が本質となる物理, 工学等の具体的問題がこれまで全く知られていなかったのは驚きでさえある. ヘルダーの不等式の 100 年以上の歴史と, 数学では日常的に使用されていることを鑑みれば, である.

3 応用例と今後の課題

本論文の注入同期に関する課題としては, まず [1][7][8][12][13] のような回路設計への応用が挙げられる. 一方, 他の分野での課題として, 制御理論の最近の研究ではエネルギー (パワー収支) 制約下での最適制御 [21][22] が注目されているが, われわれの一般化パワー (p 乗ノルム) 制約下での取り組みは, そのような研究に貢献をすることも期待される. さらに制御理論の新規な方向性として, 振動子集団の「アンサンブル制御」(例えば [23]) が開拓されているが, そこでもパルス列の入力による制御則として, われわれの結果は有用となると期待される. またヘルダーの不等式が本質的となる極値問題は, Tsallis 統計の他にも存在するが, これについて別報を期待されたい.

本稿では最近筆者の出会ったささやかな発見を鮮度よく皆様にお届けすることを目的とした. そのため厳密性や詳細については割愛せざるえなかった. これらについては末尾の文献, 筆者の研究室のサイト [24] を参照されたい.

謝辞

本研究は, 科研費基盤 B 研究のもとに徳田功准教授 (立命館大), 福田弘和准教授 (阪府大), 千葉逸人准教授 (九大) との共同研究の一環として行われた. また本研究の一部はテレコム先端技術研究支援センター SCAT 研究費助成を受けて行われた. ここに改めて感謝致します. 最後に本稿の閲読者の有益なコメントに感謝致します.

参考文献

- [1] Kawasaki, K., Akiyama, Y., Komori, K., Uno, M., Takeuchi, H., Itagaki, T., Hino, Y., Kawasaki, Y., Ito, K. and Hajimiri, A., A millimeter-wave intra-connect solution, IEEE ISSCC Digest of Technical Paper, (2010), 414–415.
- [2] 蔵本由紀, いわゆる「蔵本モデル」について, 応用数理, 17 (2007), 175–177.
- [3] Kuramoto, Y., Chemical Oscillations, Waves and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.
- [4] Adler, R., A Study of Locking Phenomena in Oscillators, Proc. IRE, 34[6] (1946), 351–357.
- [5] Kurokawa, K., Injection Locking of Microwave Solid-State Oscillators, Proc. IEEE, 61[10] (1973), 1386–1410.
- [6] Daikoku, K. and Mizushima, Y., Properties of Injection Locking in the Non-Linear Oscillator, Int. J. Electronics 31[3] (1971), 279–292.
- [7] Yamamoto, K. and Fujishima, M., A 44- μ W 4.3-GHz Injection-Locked Frequency Divider with 2.3-GHz Locking Range, IEEE J. Solid-State Circuits, 40[3] (2005), 671–677.
- [8] Kazimierczuk, M. K., Krizhanovski, V. G., Rasokhina, J. V. and Chernov, D. V., Injection-Locked Class-E Oscillator, IEEE Trans. Circuits and Systems I, 53[6] (2006), 1214–1222.
- [9] Hoppensteadt, F. C. and Izhikevich, E. M., Weakly Connected Neural Networks, Springer, New York, 1997.
- [10] Hajimiri, A. and Lee, T. H., A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators, IEEE J. Solid-State Circuits, 33[2](1998), 179–194.
- [11] Bhansali, P. and Roychowdhury, J., Gen-Adler: the Generalized Adler's Equation for Injection Locking Analysis in Oscillators, in Proc. IEEE Asia and South Pacific Design Automation Conference, (2009), 522–527.
- [12] Tanaka, H.-A., Hasegawa, A., Mizuno, H. and Endo, T., Synchronizability of distributed clock oscillators, IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 49[9](2002), 1271–1278.
- [13] Nagashima, T., Wei, X., Tanaka, H.-A. and Sekiya, H., Numerical derivations of locking ranges for injection-locked class-E oscillator, in Proc. IEEE 10th International Conference on Power Electronics and Drive Systems, (2013), 1021–1024.
- [14] 太田大輔, 田中久陽, 毎野裕亮, 同期現象の解析に必要な位相方程式の導出アルゴリズムに関する比較検討, 電子情報通信学会論文誌 A, 89[3](2006), 190–198.
- [15] Harada, T., Tanaka, H.-A., Hankins, M. J. and Kiss, I. Z., Optimal Waveform for the Entrainment of a Weakly forced Oscillator, Phys. Rev. Lett. 105[8](2010), 088301.
- [16] Zlotnik, A., Chen, Y., Kiss, I. Z., Tanaka, H.-A. and Li, J. S., Optimal Waveform for Fast Entrainment of Weakly Forced Nonlinear Oscillators, Phys. Rev. Lett., 111[2](2013), 024102.
- [17] Tanaka, H.-A., Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators, Physica D, vol. 288(2014), 1–22.
- [18] Rudin, W., Real and Complex Analysis, third ed., McGraw-Hill, New York, 1987, 63–65.
- [19] Tsallis, C., Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Springer, New York, 2009.
- [20] Tanaka, H.-A., "Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators, J. Phys. A, 47[40], (2014), 402002.
- [21] 福島直人, 萩原一郎, エネルギー取支に着目した新しい最適制御理論の構築とその応用, 応用数理, 17[2](2007), 138–154.
- [22] 福島直人, 萩原一郎, エネルギー最適制御理論: 最適制御理論の新しい枠組みとその発展性について, 応用数理 21[4](2011), 259–275.
- [23] Li, J. S., Ruths, J., Yu, T. Y., Arthanari, H. and Wagner, G., Optimal pulse design in quantum control: A unified computational method, Proc. of the National Academy of Sciences, 108[5](2011), 1879–1884.
- [24] <http://synchro4.ee.uec.ac.jp/>

[Abstract]

In this article, a universal mechanism governing entrainment limit is shown to exist under weak forcings. This underlying mechanism enables us to understand how and why entrainability is maximized; maximization of the entrainment range or that of the stability of entrainment for general forcings including pulse trains, and a fundamental limit of general $m:n$ entrainment, are clarified from a unified, global viewpoint. These entrainment limits are verified in the Hodgkin-Huxley neuron model as an example.